

Sommaire

Avant-propos	xi
Introduction	1
Chapitre 1 Les variables de durée	3
1.1 Définitions et propriétés	3
1.1.1 Définitions et exemples	3
1.1.2 Caractérisations	8
1.1.3 Distributions en logarithmes	9
1.2 Distributions usuelles	11
1.2.1 Loi exponentielle	12
1.2.2 Loi exponentielle avec état absorbant	14
1.2.3 Loi de Weibull	16
1.2.4 Loi log-normale	18
1.2.5 Loi log-logistique	20
1.2.6 Loi de Burr de type 12	22
1.2.7 Loi gamma généralisée	25
1.2.8 Loi de Fisher généralisée	27
1.2.9 Loi à hasard constant par morceaux	29
Chapitre 2 Estimation paramétrique des distributions	33
2.1 Le maximum de vraisemblance	33
2.1.1 Présentation	33
2.1.2 Ecritures de la vraisemblance	36
2.1.3 Changements de paramètres	37
2.1.4 Statistiques utiles	38
2.2 Applications sous R	41
2.2.1 Loi exponentielle	44
2.2.2 Loi log-normale	49
2.3 Application sous SAS : loi exponentielle	52

Chapitre 3 Estimation non paramétrique des distributions	65
3.1 Estimateur de Kaplan-Meier	65
3.1.1 Présentation	65
3.1.2 Application sous R	74
3.1.3 Application sous SAS	78
3.2 Estimateur actuariel	83
3.2.1 Présentation	83
3.2.2 Application sous SAS	87
3.3 Estimateur à hasard constant par morceaux	90
3.3.1 Présentation	90
3.3.2 Application sous R	90
Chapitre 4 Modélisation des durées	97
4.1 Modèles à hasards proportionnels	98
4.2 Modèles à durée accélérée	100
4.3 Ecriture en logarithmes	102
4.4 Aspects appliqués	103
4.4.1 Interprétation des coefficients	104
4.4.2 Terme constant et centrage	105
Chapitre 5 Estimation avec des hasards proportionnels	109
5.1 Le modèle de Weibull	109
5.2 Le modèle à hasard constant par morceaux	118
5.2.1 Application sous R	118
5.2.2 Application sous SAS	121
5.3 La méthode de Cox	125
5.3.1 Présentation	125
5.3.2 Application sous R	130
5.3.3 Application sous SAS	135
Chapitre 6 Estimation des modèles à durée accélérée	139
6.1 Le modèle de Weibull	139
6.1.1 Application sous SAS	141
6.1.2 Application sous R	148
6.2 Le modèle gamma généralisé	151
6.3 Le modèle de Fisher généralisé	160
Annexe A Rappels de statistique	167
A.1 Loi du produit	167
A.2 Espérance mathématique et fonction de survie	168

A.3	Changement de variable	168
A.4	Constante d'Euler	169
A.5	Fonctions gamma, bêta et polygamma	170
A.5.1	Fonction gamma	170
A.5.2	La fonction bêta	171
A.5.3	La fonction polygamma	171
A.5.4	La fonction gamma tronquée	171
Annexe B	Distributions utiles	173
B.1	Loi gamma à un paramètre	173
B.2	Loi de Lomax à un paramètre	174
B.3	Loi gamma à deux paramètres	176
B.4	Loi mobile-stable ou mélange d'exponentielles	177
B.5	Loi de Pareto	181
B.6	Loi de Gompertz	184
B.7	Loi de Gompertz-Makeham	185
Annexe C	Calcul des moments	187
C.1	Approche par la fonction génératrice des moments	187
C.1.1	Moments non centrés	187
C.1.2	Moments centrés	188
C.1.3	Moments du logarithme	188
C.1.4	Loi exponentielle	189
C.1.5	Loi de Gumbel	190
C.1.6	Loi gamma à un paramètre	191
C.1.7	Loi gamma à deux paramètres	192
C.1.8	Loi de Weibull	193
C.1.9	Loi gamma généralisée	195
C.1.10	Loi normale	196
C.1.11	Loi log-normale	197
C.1.12	Résumé	198
C.2	Approche par le calcul direct	199
C.2.1	Loi de Pareto	199
C.2.2	Loi log-logistique	201
C.2.3	Loi de Burr de type 12	202
C.2.4	Loi de Fisher généralisée	203
Annexe D	Modélisation en logarithmes	205
D.1	Modèle exponentiel et loi de Gumbel	205
D.2	Modèle exponentiel et loi exponentielle	207

D.3	Modèle gamma à un paramètre	208
D.4	Modèle de Weibull	208
D.5	Modèle gamma à deux paramètres	209
D.6	Modèle log-normal	210
D.7	Modèle log-logistique	211
D.8	Modèle de Pareto	212
D.9	Modèle gamma généralisé	212
D.10	Modèle de Fisher généralisé	213
Annexe E	Les algorithmes d'optimisation	215
E.1	Présentation des algorithmes	215
E.2	Les méthodes de gradient	217
E.3	Algorithme de Newton-Raphson	217
E.4	Algorithme de Berndt-Hall-Hausman	218
E.5	Algorithme du score	219
E.6	Méthodologie de programmation	219
E.7	Application à la loi exponentielle avec état absorbant	220
Bibliographie		243
Table des graphiques		247
Index		249

Table des graphiques

1.1	Relations entre les distributions	13
1.2	Loi exponentielle	14
1.3	Loi avec survivants	15
1.4	Fonction de hasard de la loi de Weibull ($h = 1$)	17
1.5	Fonction de hasard de la loi log-normale	19
1.6	Fonction de hasard de la loi log-logistique	21
1.7	Distribution à hasard constant par morceaux	30
2.1	Loi exponentielle, $\hat{h}_T(t)$ et $\hat{f}_T(t)$	47
2.2	Loi log-normale, $\hat{h}_T(t)$	51
2.3	Loi exponentielle, $\hat{S}_T(t)$ et $\hat{F}_T(t)$	63
2.4	Loi exponentielle, $\hat{h}_T(t)$ et $\hat{f}_T(t)$	63
3.1	Estimateur de Kaplan-Meier (graphique par défaut)	76
3.2	Estimateur de Kaplan-Meier	76
3.3	Hasard de Kaplan-Meier	77
3.4	Estimateur de Kaplan-Meier, $\hat{S}(t)$	79
3.5	Estimateur avec intervalle de confiance	80
3.6	Hasard et densité	82
3.7	Survie, méthode actuarielle	88
3.8	Hasard constant par morceaux	93
3.9	Densité	94
3.10	Survie	94
5.1	Densité de base (Weibull)	114
5.2	Graphiques par défaut	116
5.3	Avec hasard constant par morceaux (graphiques par défaut) . . .	119
5.4	Hasard constant par morceaux	120
5.5	Survie de base avec proc phreg	124
5.6	Hasard de base avec coxreg	132
5.7	Survie de base avec coxreg	133

5.8	Survie de base avec phreg	137
5.9	Hasard de base avec phreg	138
6.1	Densité de base (Weibull)	145
6.2	Survie de base (Weibull)	145
6.3	Survies à un an (Weibull)	146
6.4	Moyennes (Weibull)	147
6.5	Survies à 1 an	150
6.6	Durées moyennes	150
6.7	Densité de base (gamma généralisée)	158
6.8	Survie de base (gamma généralisée)	158
6.9	Hasard de base (gamma généralisée)	159
6.10	Moyennes (gamma généralisée)	159
6.11	Distribution de base (Fisher généralisée)	164
6.12	Densité de base (Fisher généralisée)	165
B.1	Loi gamma	174
B.2	Loi de Lomax	175
B.3	Loi mobile-stable à deux groupes	181
B.4	Hasard et densité de la loi de Pareto	183
E.1	Loi exponentielle à état absorbant, $\ell^*(\pi)$	228
E.2	Loi exponentielle à état absorbant, $\hat{S}_\pi(t)$ et $\hat{F}_\pi(t)$	237
E.3	Loi exponentielle à état absorbant, $\hat{h}_\pi(t)$ et $\hat{f}_\pi(t)$	237

Index

Algorithme

- balayage, 223
- Berndt-Hall-Hausman, 218
- du score, 219
- Newton-Raphson, 217
- optimisation, 215

Distribution

- Burr de type 12, 22, 202
- exponentielle, 12, 189, 205, 207
- exponentielle avec état absorbant, 14, 220
- de Fisher généralisée, 27, 203
- de Fisher généralisée, 213
- gamma à un paramètre, 173, 191, 208
- gamma à deux paramètres, 176, 192, 209
- gamma généralisée, 25, 195, 212
- Gompertz, 184
- Gompertz-Makeham, 185
- Gumbel, 205
- hasard constant par morceaux, 29
- log-logistique, 20, 201, 211
- log-normale, 18, 197, 210
- Lomax, 174
- mobile-stable, 177
- mélange d'exponentielles, 177
- Pareto, 181, 199, 212
- Singh-Maddala, 202
- vue d'ensemble, 13
- Weibull, 16, 193, 208

Estimateur

- actuariel, 83
- Breslow, 72
- Cox, 125
- Fisher généralisé, 160
- gamma généralisé, 151
- Greenwood, 71, 86
- hasard constant par morceaux, 118
- Kaplan-Meier, 65
- Nelson-Aalen, 73
- Weibull, 109, 139

Estimation

- changement de paramètres, 37
- des fonctions, 39
- des moments, 38
- écritures de la vraisemblance, 36
- maximum de vraisemblance, 33

Fonction

- gamma tronquée, 171
- densité, 4, 9
- digamma, 171
- hasard, 6, 9
- hasard cumulé, 8, 9
- polygamma, 171
- répartition, 3, 4, 9
- survie, 5, 9
- trigamma, 171

Modélisation

- à état absorbant, 5
- durée accélérée, 100

- en logarithmes, 9, 102
- hasards proportionnels, 98
- interprétation des coefficients, 104
- terme constant et centrage, 105

Population à risque, 66

R

- eha-coxreg, 130
- eha-phreg, 110, 118
- flexsurv, 160
- survival, 74, 90
- survival-survreg, 148

SAS

- proc IML, 238
- proc lifereg, 141, 151
- proc lifetest, 78, 83, 87
- proc phreg, 121, 135