Microéconomie de l'Incertitude
M1 Banque et Marchés Financiers

Emmanuel DUGUET

Notes de Cours, V1

SOMMAIRE

CHAPITRE 1

Concepts de base

Cette partie vise à introduire quelque concepts de base et à les illustrer par des exemples. Nous considérons un univers en environnement incertain, dans lequel les agents économiques ne peuvent pas toujours être sûrs des données d'un problème avant de prendre une décision. Plus précisément, il doivent prendre leurs décisions avant que les aléas qui comptent pour leur problème ne se réalisent. Des exemples classiques de ce type d'environnement sont l'assurance, où l'on doit déterminer son degré de couverture sans savoir si l'évènement couvert aura lieu ou non, ou encore les placements en actions donc le rendement est incertain au moment où l'on investit. Plus généralement, on ne considère que les environnements économiques où l'incertitude joue un rôle important : l'assurance n'existerait pas en l'absence d'incertitude, et les placements sur les marchés financiers ne peuvent se concevoir que dans l'incertitude.

On peut résumer l'incertitude qui pèse sur un problème économique par trois éléments :

- les états de la nature : ce sont les évènements qui peuvent se réaliser. On peut les écrire soit sous une forme discrète, comme faire face à un sinistre ou non (deux états), soit sous forme continue, comme le taux de remboursement dans le cas d'une assurance (un intervalle appartenant à $[0,1]$);
- les actions réalisables par l'agent étudié : s'assurer contre un sinistre ou non (deux actions), ou s'assurer un taux de remboursement en cas de sinistre (une valeur réelle appartenant à un intervalle);
- les conséquences des actions pour un état de la nature donné : le montant de richesse selon qu'un sinistre a eu lieu ou non et que l'on s'est assuré ou non. Ces conséquences sont souvent définie sur la richesse de l'agent étudié, ou sur des décisions économiques en général (achat de biens de consommation pour les ménages, embauche pour les entreprises).

On résume toutes ces informations dans ce que l'on appelle une *loterie*.

Dans cette partie, nous verrons successivement les loteries, le critère d'espérance mathématique et les raisons pour lesquelles on ne peut pas toujours utiliser le critère d'espérance mathématique pour prendre des décisions en environnement incertain.

1.1 Les loteries

On peut représenter les données d'un problème simple par une matrice d'information qui contient les quatre éléments suivants : les états de la nature, leurs probabilités, les actions et les conséquences des actions selon l'état de la nature qui se réalise. Prenons un exemple avec trois états de la nature $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ et trois actions $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Les probabilité sont attachées aux états de la nature, on pose donc $p_j = \Pr[e = e_j]$ et $\sum_j p_j = 1$ puisque ce sont les trois seuls états possibles. Ces probabilités peuvent être objectives ou subjectives. Les conséquences se définissent à la fois par rapport aux états de la nature et aux actions, on peut donc les noter x_{ij} où i est l'indice de l'action entreprise $i \in \{1, 2, 3\}$ et où j est l'état de la nature $j \in \{1, 2, 3\}$. La matrice d'information est la suivante :

	e_1	e_2	e_3
	p_1	p_2	p_3
a_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
a_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
a_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}

Dans ce cadre, choisir une action a_i revient à choisir des gains x_{ij} quand l'état de la nature e_j se réalise, sachant que cet évènement aura lieu avec une probabilité p_j. Dans la mesure où l'on possède des informations sur les conséquences x_{ij} et les probabilités des états de la nature, on n'a pas besoin de la liste explicite des états de la nature. Plus précisément, on interprète chaque ligne comme une loterie. Par exemple pour la première ligne, on notera :

$$a_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \right.$$

ce qui signifie que l'action a_1 apportera le gain x_{11} avec probabilité p_1, le gain x_{12} avec probabilité p_2 et le gain x_{13} avec probabilité p_3. Ces informations sont a priori suffisante pour prendre des décision dans l'incertain (avec les préférences de l'agent économique étudié, que nous verrons plus loin). Prenons un cas particulier de l'exemple précédent:

	e_1	e_2	e_3
	$0,1$	$0,4$	$0,5$
a_1	z_1	z_2	z_3
a_2	z_2	z_1	z_1
a_3	z_3	z_3	z_3

cette matrice d'information définit les trois loteries suivantes :

$$a_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{array} \right.$$

$$a_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} z_2 & z_1 & z_1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{array} \right.$$

et

$$a_3 = \begin{cases} z_3 & z_3 & z_3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{cases}$$

Arrivé, à ce stade on voit que l'on peut simplifier les deux dernière loteries. La loterie a_2 rapporte z_1 dans les états de la nature 2 et 3, donc elle rapporte z_1 avec une probabilité égale à $0,4+0,5=0,9$, ce que l'on peut écrire de manière synthétique sous la forme :

$$a_2 = \begin{cases} z_2 & z_1 \\ 0,1 & 0,9 \end{cases}$$

et l'on peut effectuer la même opération pour la loterie a_3. Cette loterie rapporte z_3 dans tous les états de la nature. Il s'agit de la *loterie certaine*, que l'on note :

$$a_3 = \begin{cases} z_3 \\ 1 \end{cases}$$

Plus généralement une loterie discrète, avec I évènements possibles peut s'écrire :

$$a = \begin{cases} z_1 & z_2 & \dots & z_I \\ p_1 & p_2 & \dots & p_I \end{cases}, \; 0 < p_i \leq 1, \; \sum_{i=1}^{I} p_i = 1.$$

où les x_i sont les réalisations de la variables d'intérêt (e.g., gains ou pertes) qui surviennent avec des probabilités respectives p_i. La condition $p_i > 0$ signifie que l'on exclut les événements impossibles, et la conditions $p_i \leq 1$ que l'on peut autoriser une loterie certaine.

On peut également définir une loterie sur des réalisations continues. On utilise alors une fonction de répartition, ou une densité, à la place des probabilités. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'utiliser la notation précédente puisque la fonction de répartition contient toute l'information nécessaire. On aura simplement :

$$F_a(z), \; z \in A$$

où A est l'ensemble des réalisations possibles z de la variable aléatoire Z, qui dépend de la loterie, et :

$$F_a(x) = \Pr[Z \leq z]$$

Si l'on utlise une densité $f_a(z)$, on aura :

$$F_a(z) = \int_{-\infty}^{z} f_a(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 1.1 (Assurance partielle) *Un ménage veut assurer sa voiture de valeur v sachant que la probabilité d'accident est p. Le ménage s'assure pour un montant $z \leq v$ et doit payer une prime d'assurance égale à βz, avec $\beta \in]0,1[$. En cas d'accident, son capital sera égal au montant remboursé z moins la prime d'assurance*

βz. S'il n'y a pas d'accident, son capital sera de v moins la prime d'assurance. Ceci correspond à la loterie :

$$a(z) = \begin{cases} (1-\beta)z & v - \beta z \\ p & 1-p \end{cases}$$

on note la loterie $a = a(z)$ afin de montrer que le résultat de la loterie dépend de la décision z prise par le ménage.

Exemple 1.2 (Jeu d'argent) *Une personne achète un jeu à gratter d'un montant m. Il peut gagner le montant $x \geq m$ avec une probabilité $p = 0,25$. La loterie correspondant à ce jeu est donnée par :*

$$a = \begin{cases} x - m & -m \\ 0,25 & 0,75 \end{cases}$$

Exemple 1.3 (Risque de chômage) *Une personne peut être au chômage avec probabilité p. Si elle travaille son salaire est w, sinon il est égal à γw, avec $0 \leq \gamma < 1$. La cotisation chômage est égale à τw, $0 < \tau < 1$. La loterie correspondante est donnée par :*

$$a = \begin{cases} \gamma w & (1-\tau)w \\ p & 1-p \end{cases}$$

Exemple 1.4 (Fonction de profit) *Une entreprise produit un bien qu'elle vend au prix aléatoire p. Pour le produire elle embauche L travailleurs qu'elle rémunère au salaire certain w. Sa fonction de production est $Q = \sqrt{L}$ et le prix p apparaît avec une densité $\varphi(p)$. On peut définir la loterie sur son profit de la manière suivante. Elle commence par maximiser son profit $\Pi(p) = pQ - wL = p\sqrt{L} - wL$ par rapport à L. La condition du premier ordre donne $L^* = (p/(2w))^2$. Donc le profit aléatoire est égal à :*

$$\Pi^*(p) = p\sqrt{L^*} - wL^* = \frac{p^2}{4w},$$

on peut donc écrire la loterie :

$$a = \begin{cases} \Pi^*(p) \\ \varphi(p) \end{cases}$$

1.2 Le critère d'espérance mathématique

Une fois que l'on a écrit les données du problème sous forme d'une loterie, il nous faut un critère nous permettant de les comparer entre elles. Ceci nous permettra de déterminer les décisions des agents en environnement incertain. Une première méthode consiste à considérer simplement le gain moyen que procure une loterie, il s'agit de l'approche par l'espérance mathématique. Nous verrons que ce critère est insuffisant pour plusieurs raisons. D'une part, il semble invalidé par des expériences et, ce qui est plus problématique, il ne permet pas d'expliquer l'existence d'un marché de l'assurance viable.

DÉFINITION 1.1 (ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE) *L'espérance mathématique d'une variable aléatorie discrète X de réalisations $(x_1, ..., x_I)$ qui surviennent avec des probabilités $(p_1, ..., p_I)$ est définie par :*

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{I} p_i x_i$$

et l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X continue de réalisations $x \in A \subset \mathbb{R}$ est définie par :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{x \in A} x f(X)\, dx$$

où $f(x)$ est la densité de probabilité de X.

1.3 Le paradoxe de Saint Pétersbourg

Le paradoxe de Saint Pétersbourg est la conséquence d'une expérimentation réalisée par Daniel Bernoulli en 1738. Il demandait à ses interlocuteurs quel droit d'entrée ils étaient près à payer pour le jeu suivant : on jette une pièce bien équilibrée et l'on compte le nombre de jets successifs qui tombent sur pile. S'il y a I jets successifs, le joueur empoche 2^I ducats. Les réponses qu'il obtient portent sur des montants faibles, de l'ordre de 4 ducats.

Quel montant le critère d'espérance mathématique nous inciterait-il à proposer? Le plus simple est d'écrire la loterie puis de calculer son espérance mathématique. Sachant que la probabilité de tomber I fois de suite sur pile est égale à $1/2^I$ et que le gain est de 2^I quand cela arrive, on obtient :

$$B = \left\{ \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & \cdots & 2^I & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{2^I} & \cdots \end{array} \right.$$

On remarque que la somme infinie des probabilités est bien égale à 1 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i - \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= \frac{1}{1-1/2} - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

donc l'espérance mathématique de cette loterie est :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(B) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^i \\
&= \lim_{I \to +\infty} \sum_{i=1}^{I} \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^i \\
&= \lim_{I \to +\infty} \sum_{i=1}^{I} 1 \\
&= \lim_{I \to +\infty} I \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

un joueur qui applique le critère d'espérance mathématique devrait donc être prêt à donner tout ce qu'il possède pour jouer à ce jeu. Ceci ne correspond pas du tout à ce que l'on observe, nous sommes donc en présence d'un paradoxe expérimental. Daniel Bernoulli propose une solution de ce paradoxe que nous verrons plus loin.

1.4 Le paradoxe de l'assurance

On considère maintenant un particulier qui dispose d'une richesse non risquée ω, et qui souhaite assurer un bien risqué de valeur v pour un montant z. Pour obtenir une indemnité z en cas de sinistre, il doit régler une prime d'assurance d'un montant βz, avec $0 < \beta \leq 1$. Le sinistre survient avec une probabilité p. La loterie sur la richesse du particulier est définie par :

$$W = \left\{ \begin{array}{cc} \omega + (1-\beta) z & \omega + v - \beta z \\ p & 1-p \end{array} \right.$$

L'assureur de son côté perçoit la prime d'assurance βz que le sinistre ait lieu ou non et doit faire face à un coût de fonctionnement de c, en plus du remboursement z qu'il doit effectuer en cas de sinistre. Si le sinistre a lieu, il fait une perte de $\beta z - z - c < 0$, et s'il n'a pas lieu il réalise un gain de $\beta z - c$. On suppose que $\beta z - c > 0$ pour le problème ait un sens. La loterie sur le profit de l'assureur est donc :

$$\Pi = \left\{ \begin{array}{cc} (\beta - 1) z - c & \beta z - c \\ p & 1-p \end{array} \right.$$

L'espérance de richesse de l'assuré est donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(W) &= p\left[\omega + (1-\beta) z\right] + (1-p)\left[\omega + v - \beta z\right] \\
&= \omega + (1-p) v + (p-\beta) z
\end{aligned}$$

et l'espérance de profit de l'assureur est :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\Pi) &= p\left[(\beta - 1) z - c\right] + (1-p)\left[\beta z - c\right] \\
&= (\beta - p) z - c
\end{aligned}$$

Ces deux espérance mathématiques sont des fonctions linéaires de z, le paramètre essentiel est donc la pente de la droite. Considérons d'abord le cas de l'assuré. Celui-ci va rechercher le montant d'assurance qui maximise l'espérance de sa richesse aléatoire W. Il doit donc résoudre le programme :

$$\max_z \mathrm{E}(W)$$
$$\text{s.c. } 0 \leq z \leq v$$

L'espérance $\mathrm{E}(W)$ est une fonction linéaire du montant assuré z, avec une pente $p - \beta$. Il y a donc trois cas possibles :

- si $p < \beta$, l'espérance de la richesse est décroissante avec le montant assuré donc on obtient une solution en coin avec une demande d'assurance $z^d = 0$.
- si $p = \beta$, l'espérance de la richesse ne dépend pas du montant assuré (droite horizontale) donc toutes les valeurs de z procurent la même richesse et l'on se retrouve dans un cas d'indétermination, soit $z^d \in [0, v]$.
- si $p > \beta$, l'espérance de la richesse est croissante avec le montant assuré donc le particulier choisit l'assurance complète, et l'on obtient la solution en coin $z^d = v$.

Globalement, on voit que le particulier ne souhaite s'assurer que si $p \geq \beta$, ce que résume le point suivant :

$$z^d = \begin{cases} 0 & \text{si } p < \beta \\ [0, v] & \text{si } p = \beta \\ v & \text{si } p > \beta \end{cases}$$

Examinons maintenant si l'assureur a intérêt à répondre à sa demande d'assurance.

L'assureur cherche à maximiser l'espérance de son profit :

$$\max_z \mathrm{E}(\Pi)$$
$$\text{s.c. } 0 \leq z \leq v$$

L'espérance $\mathrm{E}(\Pi)$ est également une fonction linéaire du montant assuré z, avec une pente $\beta - p$. On retombe donc sur les trois cas précédents.

- si $p < \beta$, l'espérance de profit est une fonction croissante du montant assuré, et l'assureur a intérêt à offrir une assurance complète, soit $z^s = v$ sous réserve que l'espérance de profit soit positive :

  $$\mathrm{E}(\Pi^*) = (\beta - p)\, v - c > 0,$$

  mais dans ce cas, l'assureur rencontre une demande nulle $z^d = 0$. Il ne peut donc pas y avoir de transaction.

- si $p = \beta$, l'espérance de profit est indépendante du montant assuré, mais surtout elle est négative en raison des frais de fonctionnement de la compagnie d'assurance c. Plus précisément $\mathrm{E}(\Pi) = (\beta - p)\,z - c = -c < 0$. Donc l'assureur ne proposera pas de contrat au particulier, et l'on aura $z^s = 0$.

- si $p > \beta$, l'espérance de profit de l'assureur sera toujours négative car $(\beta - p)\,z < 0$ donc $z^s = 0$.

La conclusion est donc la suivante : il ne peut pas y avoir de marché de l'assurance si l'on applique le critère d'espérance mathématique. C'est une critique beaucoup plus forte que le paradoxe de Saint Pétersbourg car le marché de l'assurance existe et qu'il est important dans l'économie. Il est donc important de trouver une modélisation de l'économie de l'incertain qui justifie l'existence du marché de l'assurance (et des marchés financiers) et qui explique son fonctionnement.

1.5 Quelques réponses possibles aux paradoxes

1.5.1 L'utilité de la richesse

Pour résoudre le paradoxe de Saint Pétersbourg, Daniel Bernoulli suggère de remplacer les réalisations de la richesse par leur logarithme, donc d'utiliser un critère différent de l'espérance mathématique. Nous verrons plus loin que cela revient à remplacer les réalisations monétaires x_i par leur utilité $u(x_i) = \ln x_i$. On aboutit à une utilité de la richesse définie par :

$$U(W) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\ln(2^i)}{2^i} = \ln(2) \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{2^i}$$

Il nous reste donc à trouver la somme :

$$S = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{2^i}$$

ce qui est heureusement assez facile. On sait que, pour $0 < x < 1$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^i + ...$$

donc

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + i\ x^{i-1} + ...$$

ce qui implique :

$$xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + i\ x^i + ...$$

et en posant $x = 1/2$, on obtient :

$$\frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{i}{2^i} + ...$$

donc

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{2^i} = 2$$

ce qui implique :

$$U(W) = 2 \times \ln(2) = 1,386.$$

ainsi les parieurs potentiels peuvent proposer un montant très faible pour participer à ce jeu dès lors que leurs préférences sont prises en compte. Nous verrons plus loin que ce cas particulier correspond à une aversion face au risque.

1.5.2 Le critère espérance-variance

Pour résoudre le paradoxe d'inexistance de l'assurance, on peut commencer par critiquer le critère d'espérance d'utilité :

- ce critère ne tient compte que du rendement moyen
- il ne tient pas compte des risques associés à ce rendement
- donc il ne fait pas de différence entre le rendement moyen d'une variable aléatoire et un rendement certain égal à son espérance mathématique

En première analyse, on peut mesurer le risque par la variance de la richesse :

$$\mathrm{V}(W) = \mathrm{E}\left[(W - \mathrm{E}(W))^2\right].$$

Cette quantité mesure la valeur moyenne du carré de la distance entre les réalisations W et leur valeur moyenne $\mathrm{E}(W)$. Donc plus les réalisations de la richesse s'écartent de leur moyenne, plus la richesse est risquée. Une manière de résoudre le problème d'inexistance du marché de l'assurance consiste à introduire la notion de risque dans le critère de décision. Un critère très répandu est le critère espérance-variance. On peut le définir de la manière suivante :

$$U(W) = \mathrm{E}(W) - k\,\mathrm{V}(W),$$

il s'agit d'une fonction de Markowitz. Lorsque $k > 0$, cette utilité présente une aversion pour le risque, puisqu'elle est d'autant plus faible que l'incertitude qui porte sur la richesse est élevée. Si $k = 0$ on retrouve le critère d'espérance de la richesse et l'on parle de neutralité face au risque. Quand $k < 0$, l'utilité de la richesse est d'autant plus élevée que le risque est important, on parle de goût pour le risque. Le coefficient k mesure donc l'aversion face au risque.

Reprenons l'expression de la richesse avec un contrat d'assurance :

$$W = \left\{ \begin{array}{cc} \omega + (1-\beta)\, z & \omega + v - \beta z \\ p & 1-p \end{array} \right.$$

nous avons vu que son espérance est égale à :

$$\mathrm{E}\,(W) = \omega + (1-p)\, v + (p-\beta)\, z$$

et sa variance est égale à :

$$\mathrm{V}\,(W) = p\,[\omega + (1-\beta)\, z - (\omega + (1-p)\, v + (p-\beta)\, z)]^2 \\ + (1-p)\,[\omega + v - \beta z - (\omega + (1-p)\, v + (p-\beta)\, z)]^2$$

après simplification, on trouve :

$$\mathrm{V}\,(W) = p\,(1-p)\,(v-z)^2\,,$$

le risque associé à cette richesse est croissant avec l'écart entre la valeur du bien et le montant remboursé en cas de sinistre. Moins on s'assure, plus la variance est forte. Ce risque varie également avec la probabilité de sinistre. L'expression $p\,(1-p)$ est minimale en $p = 0$ (évènement impossible) et $p = 1$ (évènement certain), et maximale en $p = 1/2$. C'est donc quand le sinistre a autant de chances d'arriver que l'absence de sinistre que le risque est le plus fort. On peut interpréter l'expression $p\,(1-p)$ comme un indicateur d'incertitude sur les états de la nature. L'incertitude est maximale en $p = 1/2$ donc la richesse est plus risquée en ce point. L'utilité de Markowitz du problème d'assurance est donc égale à :

$$U\,(W) = \omega + (1-p)\, v + (p-\beta)\, z - kp\,(1-p)\,(v-z)^2$$

On supposera ici que l'on a toujours $p < \beta$ afin que l'assureur puisse proposer des contrats rentables. Trois cas sont à distinguer, selon le degré d'aversion face au risque. Si $k < 0$, le décideur aime le risque et ses préférences $U\,(W)$ sont représentées par une fonction convexe en z. On se retrouve donc avec une solution en coin. En $z = 0$ l'utilité est égale à :

$$U\,(z=0) = \omega + (1-p)\, v - kp\,(1-p)\, v^2$$

et en $z = v$:

$$U\,(z=v) = \omega + (1-p)\, v + (p-\beta)\, v,$$

en effectuant la différence on trouve que :

$$U\,(z=0) - U\,(z=v) = -kp\,(1-p)\, v^2 - (p-\beta)\, v < 0,\ \forall p < \beta$$

donc l'utilité est maximale en $z^* = 0$. Un décideur qui aime le risque ne s'assure pas, ce qui est conforme à l'intuition.

Si le décideur est neutre face au risque, on se retrouve dans le cas de l'espérance mathématique que nous avons déjà étudié, donc il n'existe pas de marché de l'assurance. Il nous reste donc à examiner le cas où le décideur présente de l'aversion face au risque. Dans ce cas, $k > 0$, la fonction d'utilité est une fonction concave de z (car le terme du second degré présente un signe négatif). La solution est donc donnée par la condition du premier ordre. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= p - \beta + 2kp\,(1-p)\,(v-z) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= -2kp\,(1-p)\,v < 0 \end{aligned}$$

en résolvant la condition du premier ordre $\partial U/\partial z\,(z^*) = 0$, on trouve :

$$z^* = v - \frac{\beta - p}{2kp\,(1-p)},$$

et ce montant peut bien être compris strictement entre 0 et v. Un marché de l'assurance peut donc exister quand les décideurs sont riscophobes. Nous pouvons également, à partir de z^*, voir quels sont les déterminants du montant assuré. On voit que le montant d'assurance choisi :

- est croissant avec le degré d'aversion pour le risque k; toutefois l'assurance ne sera jamais complète $z^* < v$, sauf dans le cas limite d'une aversion infinie pour le risque $(k \to +\infty)$;
- est décroissant avec le taux de prime d'assurance qu'il faut payer β, c'est un effet prix classique;
- Il reste à voir la dépendance du montant assuré par rapport à la probabilité de sinistre. On a:

  $$\frac{\partial z^*}{\partial p} = \frac{p^2 - 2\beta p + \beta}{2kp^2\,(1-p)^2} = \frac{(p-\beta)^2 + \beta\,(1-\beta)}{2kp^2\,(1-p)^2} > 0$$

  donc le montant assuré est croissant avec la probabilité de sinistre (car $0 < \beta < 1$) .

Globalement les résultats correspondent à l'intuition, à l'exception d'une propriété : le montant de l'assurance ne dépend pas de la richesse non risquée ω du décideur. Nous verrons que ce résultat n'est pas général.

1.6 L'utilité indirecte

L'approche de Bernoulli pour résoudre le paradoxe de Saint Pétersbourg fait appel à une fonction d'utilité définie directement sur les montants monétaires. Cette notion correspond au concept d'utilité indirecte utilisé en microéconomie. Considérons un décideur qui doit allouer sa richesse M entre G consommations $x = (x_1, ..., x_G)$ vendues aux prix $p = (p_1, ..., p_G)$. On résume les préférences du décideur par une fonction d'utilité $f(x)$ qui lui permet de classer tous les paniers de biens possibles. Comme f est directement définie sur les actions du décideur, il s'agit d'une fonction d'utilité directe. Ce type d'approche n'est pas toujours la plus pratique en microéconomie de l'incertitude, car les décisions portent souvent sur des montants monétaires. On préfère souvent utiliser la fonction d'utilité indirecte définie ci-dessous.

On considère que le décideur doit maximiser son utilité sous contraite de richesse. Il résoud le programme suivant :

$$\max_x f(x)$$
$$\text{s.c.} \sum_{g=1}^{G} p_g x_g \leq M$$

qui fournit les G fonctions de demande que l'on note :

$$x^d(p, M) = \left(x_1^d(p, M), ..., x_G^d(p, M)\right)$$

l'utilité indirecte est alors obtenue en remplaçant les quantités x par leur expression en fonction des prix et de la richesse $x^d(p, M)$. On note l'utilité indirecte de la manière suivante :

$$u(p, M) = f\left(x^d(p, M)\right).$$

A ce stade on peut ajouter l'hypothèse que les prix sont fixes sur la période de décision $p = \overline{p}$, afin de ne garder que la dépendance de l'utilité vis à vis de la richesse, on obtiendra donc :

$$u(M) = f\left(x^d(\overline{p}, M)\right).$$

C'est le type de fonction d'utilité que nous utiliserons le plus souvent. Dans le cas du paradoxe de Saint Pétersbourg, nous avions utilisé $u(x) = \ln x$.

CHAPITRE 2

L'espérance d'utilité

Le concept d'espérance d'utilité a été introduit par John von Neumann et Oskar Morgenstern dans leur ouvrage *Theory of Games and Economic Behaviour* en 1944. Ce concept est extrêmement pratique et permet d'obtenir de nombreux résultats intéressants. Leur approche consiste à étendre le concept de fonction d'utilité à la décision dans l'incertitude. Pour parvenir à ce résultat, on définit les préférences directement sur des loteries. L'espérance d'utilité de la richesse aléatoire W, noté $U(W)$ est définie par :

$$U(W) = \mathrm{E}(u(W))$$

où $u(w)$ est l'utilité indirecte associée à la réalisation w de la variable aléatoire W. Dans le cas continu, pour une loterie de densité $g(w)$ avec support S_W, l'espérance d'utilité est donnée par :

$$U(W) = \int_{S_W} g(w)\, u(w)\, \mathrm{d}w,$$

et dans le cas discret, pour une loterie $L = (w_i, p_i)$, on obtient :

$$U(W) = \sum_{i=1}^{I} p_i u(w_i).$$

Nous voyons ici que la résolution du paradoxe de Saint Pétersbourg par D. Bernoulli revient à supposer un critère d'espérance d'utilité dans lequel les préférences sur les réalisations w_i sont représentées par $u(w_i) = \ln w_i$. Avec cette hypothèse, les joueurs potentiels ont une utilité décroissante de la richesse.

On voit que ce critère de décision généralise bien la fonction d'utilité en environnement certain puisque, lorsqu'on l'applique à une loterie certaine :

$$W = \begin{cases} w \\ 1 \end{cases}$$

on obtient :

$$\mathrm{E}(u(W)) = 1 \times u(w) = u(w),$$

la fonction d'utilité en environnement certain. Il y a toutefois une différence importante entre les propriétés de l'espérance d'utilité et les propriétés de la fonction d'utilité en environnement certain. Dans l'approche en environnement certain, la fonction d'utlité n'est définie qu'à une fonction croissante près, de sorte que les mêmes préférences peuvent être représentées par plusieurs fonctions d'utilité. C'est également vrai de l'espérance d'utilité $U(W) = \mathrm{E}(u(W))$ mais, si l'on prend n'importe quelle transformation croissante, le résultat n'est pas forcément une fonction d'utilité espérée. Si l'on souhaite garder une fonction d'utilité espérée, il faut se retreindre aux fonctions affines croissantes :

$$g(U) = a + b\,U,\ a \in \mathbb{R},\ b > 0.$$

La raison est la suivante :

$$\mathrm{E}(g(U)) = a + b\ \mathrm{E}(U)$$

de sorte que

$$\begin{gathered} \mathrm{E}(u(W_1)) > \mathrm{E}(u(W_2)) \\ \Leftrightarrow a + b\,\mathrm{E}(u(W_1)) > a + b\,\mathrm{E}(u(W_2)) \\ \forall a \in \mathbb{R},\ b > 0. \end{gathered}$$

Ainsi, si l'on souhaite garder une espérance d'utilité, il faut se limiter aux transformations affine de la fonction d'utilité de départ. Sinon, il faut utiliser un critère plus complexe.

Le critère d'espérance d'utilité généralise également le critère d'espérance mathématique. Nous avons vu qu'un décideur est neutre face au risque si :

$$U(W) = \mathrm{E}(W),$$

pour se ramener à ce cas il suffit de prendre la fonction d'utilité suivante :

$$u(x) = x,$$

on aura alors :

$$U(W) = \mathrm{E}(u(W)) = \mathrm{E}(W),$$

on utilisera donc la fonction identité, ou une transformation affine croissante de cette fonction, pour représenter les préférences d'un décideur neutre face au risque.

Exemple 2.1 *Reprenons le problème d'assurance dans le cadre de l'espérance d'utilité. Prenons les préférences logarithmiques $u(x) = \ln x$. La loterie associée à l'assurance est :*

$$W = \begin{cases} \omega + (1-\beta)\,z & \omega + v - \beta z \\ p & 1-p \end{cases}$$

le critère d'espérance d'utilité est donc égal à :

$$\begin{aligned} U(W) &= \mathrm{E}(u(W)) \\ &= p\ u(\omega+(1-\beta)z)+(1-p)\,u(\omega+v-\beta z) \\ &= p\ln(\omega+(1-\beta)z)+(1-p)\ln(\omega+v-\beta z) \end{aligned}$$

Le programme du décideur est donné par :

$$\max_z U(W) \ \ s.c.\ \ 0 \leq z \leq v,$$

la condition du premier ordre est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z}(\widetilde{z}) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \ \frac{p(1-\beta)}{\omega+(1-\beta)\widetilde{z}} - \frac{\beta(1-p)}{\omega+v-\beta\widetilde{z}} = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne une solution intérieure :

$$\widetilde{z} = \frac{p}{\beta}v - \frac{\beta-p}{\beta(1-\beta)}\omega$$

,et il faut vérifier la condition du second ordre :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(z) = -\frac{p(1-\beta)^2}{[\omega+(1-\beta)z]^2} - \frac{\beta^2(1-p)}{[\omega+v-\beta z]^2} < 0.$$

on obtient donc la solution :

$$z^* = \begin{cases} 0 & si\ \widetilde{z} < 0 \\ \widetilde{z} & si\ 0 \leq \widetilde{z} < v \\ v & si\ \widetilde{z} > v \end{cases}$$

Commentons la forme obtenue. Le montant assuré :

- *augmente avec la valeur du bien v que l'on souhaite assurer;*
- *croît avec la probabilité de sinistre p;*
- *décroît avec la richesse ω du client potentiel; ce résultat est important car on ne le trouvait pas avec le critère espérance-variance. Il indique que les individus les plus riches sont leurs propres assureurs;*
- *pour l'effet du prix unitaire de l'assurance β, il faut calculer la dérivée :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial \beta} &= -\frac{p}{\beta^2}v - \frac{\omega}{\beta^2(1-\beta)^2}\left(\beta^2-2\beta p+p\right) \\ &= -\frac{p}{\beta^2}v - \frac{\omega}{\beta^2(1-\beta)^2}\left[(\beta-p)^2+p(1-p)\right] < 0,\ \ \forall p \in [0,1] \end{aligned}$$

  donc plus l'assurance est chère moins on s'assure, toutes choses égales par ailleurs.

2.1 Les fonctions de Markowitz

Considérons une fonction d'utilité quadratique :

$$u(x) = c_0 + c_1 x + c_1 x^2,$$

l'espérance d'utilité correspondante est donnée par :

$$\mathrm{E}(u(W)) = c_0 + c_1 \mathrm{E}(W) + c_2 \mathrm{E}\left(W^2\right)$$

or $\mathrm{V}(W) = \mathrm{E}(W^2) - \mathrm{E}(W)^2$, de sorte que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(u(W)) &= c_0 + c_1 \mathrm{E}(W) + c_2 \left(\mathrm{V}(W) + \mathrm{E}(W)^2\right) \\
&= c_0 + c_1 \mathrm{E}(W) + c_2 \mathrm{E}(W)^2 + c_2 \mathrm{V}(W) \\
&= g(\mathrm{E}(W), \mathrm{V}(W)).
\end{aligned}$$

La fonction de Markowitz, n'est pas linéaire avec $\mathrm{E}(W)$ mais il est possible d'obtenir une fonction linéaire avec des hypothèses plus fortes. On remarque également que la variance peut apparaître naturellement avec un critère d'espérance d'utilité.

2.2 La mesure du risque

La mesure du risque à partir d'une fonction d'utilité reste une mesure abstraite qui n'est pas directement interprétable. Comme on travaille essentiellement sur les montants monétaires, il est plus pratique de travailler sur une mesure monétaire du risque. L'intuition d'une telle mesure est la suivante : pour une loterie donnée, combien un individu serait-il prêt à payer pour se débarasser de l'incertitude? La réponse à cette question dépend à la fois de la loterie et des préférences indivivuelles. Pour mesurer le risque de manière plus directe, on utilise les concepts d'*équivalent certain*, de *prix de vente* d'une loterie et de *prime de risque*.

DÉFINITION 2.1 (EQUIVALENT CERTAIN) *L'équivalent certain d'une richesse aléatoire W est la richesse certaine $\overline{w}$ qui procure la même utilité que la richesse aléatoire W :*

$$\overline{w} \mid u(\overline{w}) = \mathrm{E}(u(W))$$

ou de manière équivalente :

$$\overline{w} = u^{-1}(\mathrm{E}(u(W))).$$

Exemple 2.2 *Un investisseur de préférences $u(x) = \sqrt{x}$ possédant $\omega = 100$€ se voit confronté à la loterie X suivante :*

$$X = \begin{cases} -64 & 156 \\ 0,5 & 0,5 \end{cases}$$

quel-est l'équivalent certain de sa richesse?
On commence par exprimer la loterie de sa richesse aléatoire :

$$W = \omega + X = \begin{cases} 100-64 & 100+156 \\ 0,5 & 0,5 \end{cases} = \begin{cases} 36 & 256 \\ 0,5 & 0,5 \end{cases}$$

son espérance d'utilité est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right) &= 0,5\sqrt{36} + 0,5\sqrt{256} \\ &= 0,5 \times 6 + 0,5 \times 16 \\ &= 11 \end{aligned}$$

on cherche donc une richesse certaine $\overline{w}$ vérifiant :

$$u\left(\overline{w}\right) = 11 \Leftrightarrow \sqrt{\overline{w}} = 11 \Leftrightarrow \overline{w} = 121€,$$

on peut également remarquer que $u^{-1}\left(x\right) = x^2$ de sorte que $\overline{w} = 11^2$.

Dans l'exemple précédent, nous avons vu que l'équivalent certain de la loterie W est de 121€, or l'espérance mathématique de la richesse W est égale à

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(W\right) &= 0,5 \times 36 + 0,5 \times 256 \\ &= 18 + 128 \\ &= 146€, \end{aligned}$$

ainsi le décideur est prêt à recevoir une valeur certaine plus faible (121€) que la valeur moyenne de la loterie (146€) pour être libéré du risque de variation de sa richesse. Ceci correspond à l'intuition du concept d'aversion face au risque. Tout se passe comme si le décideur était prêt à céder 146-121=25€ pour ne plus faire face au risque. C'est la prime de risque. Pour définir ce concept de manière plus précise, nous introduisons la notion de *prix de vente* d'une loterie.

DÉFINITION 2.2 (PRIX DE VENTE) *Le prix de vente p_v de la partie aléatoire X d'une richesse W est le prix minimal à partir duquel le propriétaire de cette loterie est prêt à la vendre.*

Remarque 2.1 En vendant une loterie à un prix p_v le propriétaire cède une richesse aléatoire $W = \omega + X$ en échange d'une richesse certaine $\overline{w} = \omega + p_v$, où $\overline{w}$ est l'équivalent certain de la richesse W.

Plus exactement, le propriétaire d'une loterie X accepte de la vendre au prix z si son utilité vérifie :

$$u\left(\omega + z\right) \geq \mathrm{E}\left(u\left(\omega + X\right)\right) = \mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right) = u\left(\overline{w}\right)$$

où $\overline{w}$ est l'équivalent certain de la richesse aléatoire W. Comme la fonction d'utilité u est croissante, ceci implique que :

$$\omega + z \geq \overline{w} \Leftrightarrow z \geq \overline{w} - \omega,$$

on en déduit que :

$$p_v = \arg\min_z \{z \geq \overline{w} - \omega\} = \overline{w} - \omega.$$

Un prix de vente peut être positif ou négatif : s'il est positif, cela signifie que le propriétaire exige une rémunération en échange de sa loterie; s'il est négatif, cela signifie qu'il est prêt à payer l'acquéreur pour ne plus encourir le risque de cette loterie.

Exemple 2.3 *Le prix de vente de la loterie précédente est égal à :*

$$p_v = \overline{w} - \omega = 121 - 100 = 21€,$$

le propriétaire de la loterie est prêt à la vendre pour 21€ pour ne plus encourir le risque associé à cette loterie. Comme cette loterie rapporte 46€ en moyenne, on en déduira que le décideur présente une aversion pour le risque.

Exemple 2.4 *On considère le même décideur,* $u(x) = \sqrt{x}$, $\omega = 100€$, *confronté à une loterie différente* Y :

$$Y = \begin{cases} -91 & 21 \\ 0,5 & 0,5 \end{cases} \Rightarrow W = \omega + Y = \begin{cases} 9 & 121 \\ 0,5 & 0,5 \end{cases}$$

l'espérance d'utilité de cette loterie est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(u(W)) &= 0,5\sqrt{9} + 0,5\sqrt{121} \\ &= 0,5 \times 3 + 0,5 \times 11 \\ &= 7 \end{aligned}$$

donc l'équivalent certain de sa richesse aléatoire est égal à :

$$\overline{w} = 7^2 = 49€$$

et le prix de vente de la loterie de :

$$p_v = \overline{w} - \omega = 49 - 100 = -51€ < 0,$$

donc le propriétaire de la loterie est prêt à payer 51€ à un acquéreur éventuel de cette loterie. Notons qu'en moyenne, cette loterie fera faire une perte à son propriétaire puisque :

$$\mathrm{E}(Y) = -0,5 \times 91 + 0,5 \times 21 = -35€,$$

le fait que le propriétaire soit prêt à payer 51€ *pour ne plus être confronté à un risque moyen de* 35€ *est caractéristique d'une aversion pour le risque.*

Comme le montrent les deux exemples précédents, l'aversion face au risque n'est pas définie par le signe du prix de vente d'une loterie. Quelque soient les préférences du décideur, le prix de vente d'une loterie peut être positif ou négatif. Pour s'en convaincre, considérons le cas d'un agent neutre face au risque. Par définition $u(x) = x$ donc :

$$\overline{w} = \mathrm{E}(u(W)) = \mathrm{E}(W)$$

et

$$\begin{aligned} p_v &= \overline{w} - \omega \\ &= \mathrm{E}(W) - \omega \\ &= \mathrm{E}(\omega + X) - \omega \\ &= \mathrm{E}(X) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

car une espérance mathématique peut avoir n'importe quel signe. Ce qui compte est *l'écart* entre le prix de vente et l'espérance mathématique de la loterie. Il s'agit d'une définition de la *prime de risque*.

2.3 La prime de risque

2.3.1 Expression exacte

DÉFINITION 2.3 (PRIME DE RISQUE ABSOLUE) *La prime de risque absolue π_a est le montant que le décideur est prêt à payer pour s'affranchir du risque. La prime de risque π d'une richesse aléatoire $W = \omega + X$ est égale à l'écart entre l'espérance mathématique de la partie aléatoire de la richesse et son prix de vente :*

$$\pi_a = \mathrm{E}(X) - p_v.$$

On peut également définir la prime de risque π comme l'écart entre l'espérance de la richesse aléatoire et son équivalent certain :

$$\begin{aligned} \pi_a &= \mathrm{E}(X) - (\overline{w} - \omega) \\ &= \mathrm{E}(\omega + X) - \overline{w} \\ &= \mathrm{E}(W) - \overline{w}. \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 2.1 (PRIME DE RISQUE ABSOLUE) *On peut également définir la prime de risque absolue de la manière suivante :*

$$u(\mathrm{E}(W) - \pi_a) = \mathrm{E}(u(W)) \Leftrightarrow \pi_a = \mathrm{E}(W) - u^{-1}(\mathrm{E}(u(W))),$$

cette propriété vient du fait que l'équivalent certain est défini par $u(\overline{w}) = \mathrm{E}(u(W))$ et que $\pi_a = \mathrm{E}(W) - \overline{w} \Leftrightarrow \overline{w} = \mathrm{E}(W) - \pi_a$.

DÉFINITION 2.4 (AVERSION FACE AU RISQUE) *L'aversion face au risque peut se définir par rapport à la prime de risque absolue π_a associée à une richesse W. Plus précisément :*

- *Aversion face au risque : $\pi_a > 0$;*

- *Neutralité face au risque :* $\pi_a = 0$;
- *Goût pour le risque :* $\pi_a < 0$.

  Un décideur riscophobe est prêt à payer pour s'affranchir du risque, alors qu'un décideur riscophile est prêt à payer pour acquérir un risque supplémentaire.

PROPRIÉTÉ 2.2 (INÉGALITÉ DE JENSEN) *Soit f une fonction strictement concave et W une variable aléatoire réelle :*

$$f(\mathrm{E}(W)) > \mathrm{E}(f(W)).$$

Remarque : si f est strictement convexe, $f(\mathrm{E}(W)) < \mathrm{E}(f(W))$; si f est linéaire (donc concave et convexe), $f(\mathrm{E}(W)) = \mathrm{E}(f(W))$.

La prime de risque se définit donc en comparant l'espérance mathématique d'une richesse avec son équivalent certain. Elle permet également de mesurer un degré d'aversion face au risque en unités monétaires. En fait, la forme de la fonction d'utilité permet de déterminer directement si un décideur présente de l'aversion pour le risque. L'équivalent certain d'une richesse aléatoire W est défini par :

$$\overline{w} = u^{-1}(\mathrm{E}(u(W)))$$

et la prime de risque est égale à :

$$\pi = \mathrm{E}(W) - \overline{w} = \mathrm{E}(W) - u^{-1}(\mathrm{E}(u(W)))$$

donc la prime de risque est positive si et seulement si :

$$\mathrm{E}(W) > u^{-1}(\mathrm{E}(u(W))) \Leftrightarrow u(\mathrm{E}(W)) > \mathrm{E}(u(W)),$$

on retrouve l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction d'utilité u et à la richesse aléatoire W. Un décideur est riscophobe si ses préférences sont représentées par une fonction d'utilité concave.

Quand la prime de risque est nulle :

$$u(\mathrm{E}(W)) = \mathrm{E}(u(W)),$$

donc les préférences peuvent être représentées par une fonction linéaire quand le décideur est neutre face au risque. Enfin, si la prime de risque est négative, on doit avoir :

$$u(\mathrm{E}(W)) < \mathrm{E}(u(W)),$$

les préférences du décideur sont représentées par une fonction d'utilité convexe quand il est riscophile.

Exemple 2.5 (Risque de chômage) *On considère un travailleur qui gagne un revenu r quand il est en emploi avec probabilité $1-p$. Quand il est au chômage (avec probabilité p), il peçoit une indemnité $b < r$. Sa richesse initiale est égale à ω et ses préférences sont représentées par $u(x) = \ln x$. On peut représenter ce risque par une loterie sur la richesse du travailleur :*

$$X = \begin{cases} b & r \\ p & 1-p \end{cases} \Rightarrow W = \omega + X = \begin{cases} \omega + b & \omega + r \\ p & 1-p \end{cases}$$

L'espérance de la richesse est égale à :

$$\mathrm{E}(W) = \omega + p \times b + (1-p) \times r$$

et l'espérance du risque de chômage à :

$$\mathrm{E}(X) = p \times b + (1-p) \times r$$

L'espérance d'utilité de la richesse est égale à :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(u(W)) &= p \ln(\omega + b) + (1-p) \ln(\omega + r) \\ &= \ln\left[(\omega + b)^p (\omega + r)^{1-p}\right] \end{aligned}$$

donc son équivalent certain est égal à :

$$\begin{aligned} \overline{w} &= \exp[\mathrm{E}(u(W))] \\ &= (\omega + b)^p (\omega + r)^{1-p} \end{aligned}$$

et le prix de vente du risque de chômage est égal à :

$$\begin{aligned} p_v &= \overline{w} - \omega \\ &= (\omega + b)^p (\omega + r)^{1-p} - \omega. \end{aligned}$$

La prime de risque associée au chômage peut être calculée par la formule:

$$\begin{aligned} \pi_a &= \mathrm{E}(X) - p_v \\ &= p \times b + (1-p) \times r - (\omega + b)^p (\omega + r)^{1-p} + \omega \end{aligned}$$

ou par la formule :

$$\begin{aligned} \pi_a &= \mathrm{E}(W) - \overline{w} \\ &= \omega + p \times b + (1-p) \times r - (\omega + b)^p (\omega + r)^{1-p}. \end{aligned}$$

Il est intéressant d'observer que cette prime de risque dépend fortement de la richesse intiale du travailleur. Pour fixer les idées, nous fixerons $r = 1200$€, $b = 600$€, $p = 0,1$. Calculer les primes de risque pour un chômeur ayant une richesse de $\omega = 1000$€ et pour un chômeur ayant une richesse de $\omega = 0$€. Dans le premier cas, l'espérance de la richesse est de :

$$\mathrm{E}(W) = 1000 + 0,1 \times 600 + 0,9 \times 1200 = 2140€,$$

et l'équivalent certain de cette richesse :

$$\overline{w} = (1600)^{0,1} (2200)^{0,9} \simeq 2131€,$$

donc la prime de risque est de :

$$\pi_a = 2140 - 2131 = 9€,$$

le premier chômeur est prêt à payer 9€ pour être libéré du risque de chômage. Il présente de l'aversion vis à vis du risque. Dans le second cas, l'espérance de la richesse est de :

$$\mathrm{E}(W) = 0,1 \times 600 + 0,9 \times 1200 = 1140€,$$

et l'équivalent certain de cette richesse est de :

$$\overline{w} = (600)^{0,1} (1200)^{0,9} \simeq 1120€,$$

d'où la prime de risque :

$$\pi_a = 1240 - 1220 = 20€,$$

le chômeur le moins riche est prêt à payer une prime de risque plus importante à préférences et risque identiques.

DÉFINITION 2.5 *Un décideur A doté de préférences u_A est plus riscophobeque le décideur B s'il existe une fonction f croissante et concave telle que :*

$$u_A(x) = f(u_B(x)).$$

Cette définition permet de vérifier qu'un décideur A plus riscophobe qu'un décideur B aura une prime de risque plus importante que celle de B. Pour voir cette propriété, on part de la définition de la prime de risque du décideur A, π_A, puis on utilise celle du décideur B, π_B :

$$\begin{aligned}
u_A(\mathrm{E}(W) - \pi_A) &= \mathrm{E}(u_A(W)) \\
&= \mathrm{E}(f(u_B(W))) \\
&< f(\mathrm{E}(u_B(W))) \\
&= f(u_B(\mathrm{E}(W) - \pi_B)) \\
&= u_A(\mathrm{E}(W) - \pi_B)
\end{aligned}$$

or u_A est une fonction croissante, donc :

$$\begin{aligned}
u_A(\mathrm{E}(W) - \pi_A) &< u_A(\mathrm{E}(W) - \pi_B) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{E}(W) - \pi_A < \mathrm{E}(W) - \pi_B \\
&\Leftrightarrow \pi_A > \pi_B.
\end{aligned}$$

Il est donc possible de classer le degré d'aversion face au risque des décideurs en comparant les primes de risque. Cette propriété est importante car les fonction d'utilité ne sont pas observables alors que les primes de risque le sont parfois. Nous retrouverons cette propriété avec le théorème de Pratt.

2.3.2 Expression approchée

Cette section présente une méthode qui permet d'approximer les primes de risque. Kenneth Arrow[1] et John Pratt ont proposé l'approximation suivante pour un petit risque :

$$\pi \simeq \frac{\mathrm{V}(W)}{2} \times \left(-\frac{u''(\mathrm{E}(W))}{u'(\mathrm{E}(W))}\right).$$

Le premier terme, en $\mathrm{V}(W)/2$, mesure l'incertitude associée à la richesse; le second terme, en $-u''(.)/u'(.)$, mesure l'aversion face au risque du décideur. Cette formule simplifiée indique simplement que la prime de risque est croissante avec l'incertitude (objective) et avec l'aversion face au risque (subjective).

Pour démontrer cette formule, nous commençons par utiliser la relation suivante, qui définit la prime de risque :

$$\begin{aligned} \pi &= \mathrm{E}(W) - u^{-1}(\mathrm{E}(u(W))) \qquad (2.1) \\ &\Leftrightarrow u^{-1}(\mathrm{E}(u(W))) = \mathrm{E}(W) - \pi \\ &\Leftrightarrow \mathrm{E}(u(W)) = u(\mathrm{E}(W) - \pi). \end{aligned}$$

La méthode consiste à effectuer un développement limité de cette expression pour de petits risques, c'est-à-dire pour des loterie qui s'écarte peu de sa moyenne. Afin de simplifier le membre de gauche de l'équation (2.1), on effectue un développement limité à l'ordre 2 de la fonction d'utilité $u(x)$ au voisinage d'un point m :

$$u(x) \simeq u(m) + (x-m)\,u'(m) + \frac{1}{2}(x-m)^2\,u''(m),$$

on en déduit que pour une variable aléatoire W, on doit avoir :

$$u(W) \simeq u(m) + (W-m)\,u'(m) + \frac{1}{2}(W-m)^2\,u''(m),$$

en prenant l'espérance mathématique de l'expression précédente, et en tenant compte du fait que le développement limité se fait au voisinage de l'espérance de la variable aléatoire W, $m = \mathrm{E}(W)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(u(W)) &\simeq \mathrm{E}\left[u(m) + (W-m)\,u'(m) + \frac{1}{2}(W-m)^2\,u''(m)\right] \qquad (2.2) \\ &\simeq u(m) + (\mathrm{E}(W)-m)\,u'(m) + \frac{1}{2}\mathrm{E}\left[(W-m)^2\right]u''(m) \\ &\simeq u(m) + \frac{1}{2}\mathrm{V}(W)\,u''(m) \\ &\simeq u(\mathrm{E}(W)) + \frac{1}{2}\mathrm{V}(W)\,u''(\mathrm{E}(W)). \end{aligned}$$

Considérons maintenant le membre de droite de l'équation (2.1). Comme le risque est petit, on peut effectuer un développement limité au premier ordre au voisinage

[1] Kenneth Arrow a obtenu le prix Nobel d'économie en 1972.

d'une prime de risque nulle $(\pi_a = 0)$. On notera $\widetilde{\pi}_a$ la valeur approchée de la prime de risque ::

$$u\left(\mathrm{E}(W) - \pi_a\right) \simeq u\left(\mathrm{E}(W)\right) - \pi_a u'\left(\mathrm{E}(W)\right),$$

en égalisant les approximations des deux membres de l'équation (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} u\left(\mathrm{E}(W)\right) + \frac{1}{2}\mathrm{V}(W)\, u''\left(\mathrm{E}(W)\right) &\simeq u\left(\mathrm{E}(W)\right) - \widetilde{\pi}_a u'\left(\mathrm{E}(W)\right) \\ \Leftrightarrow \widetilde{\pi}_a &\simeq \frac{\mathrm{V}(W)}{2} \times \left(-\frac{u''\left(\mathrm{E}(W)\right)}{u'\left(\mathrm{E}(W)\right)}\right). \end{aligned}$$

Avec cette expression, on voit que :

- quand les préférences sont concaves $(u'' < 0)$, la prime de risque est positive
- plus la variance est forte, plus la prime de risque est importante.

La seconde partie de l'expression est utilisée pour mesurer l'intensité de l'aversion pour le risque. On définit l'indice d'aversion absolue pour le risque d'Arrow-Pratt comme :

$$\mathrm{A}_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)},$$

pour toute valeur certaine. Ce coefficient mesure le degré de concavité de la fonctio d'utilité au voisinage du point x. Plus il est important, plus l'aversion absolue pour le risque est forte. La prime de risque absolue peut donc se réécrire :

$$\widetilde{\pi}_a = \frac{\mathrm{V}(W)}{2} \times \mathrm{A}_a\left(\mathrm{E}(W)\right),$$

on remarque alors que :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W) &= \mathrm{E}(\omega + X) = \omega + \mathrm{E}(X) \\ \mathrm{V}(W) &= \mathrm{V}(\omega + X) = \mathrm{V}(X), \end{aligned}$$

donc on peut réécrire la prime de risque absolue en fonction des caractéristiques de la loterie sous la forme :

$$\widetilde{\pi}_a = \frac{\mathrm{V}(X)}{2} \mathrm{A}_a\left(\omega + \mathrm{E}(X)\right).$$

THÉORÈME 2.1 (PRATT) *Soient deux individus A et B dont les préférences sont représentées respectivement par* $U_A(W) = \mathrm{E}(u_A(W))$ *et* $U_B(W) = \mathrm{E}(u_B(W))$, *les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) u_A *est une transformation strictement croissante et strictement concave de* u_B :

$$\exists f,\ f' > 0,\ f'' < 0 : u_A(x) = f\left(u_B(x)\right).$$

(ii) La prime de risque absolue de A associée à la richesse aléatoire W est supérieure à la prime de risque absolue de B associée à la même richesse, pour tout petit risque X tel que $W = \omega + X$:

$$\pi_A(X) > \pi_B(X).$$

(iii) En n'importe quel point x, l'indice d'Arrow-Pratt de A est supérieure à celui de B :

$$\forall x,\ -\frac{u''_A(x)}{u'_A(x)} > -\frac{u''_B(x)}{u'_B(x)}.$$

2.4 Les types de risque

On distingue trois types de risque. Le premier X est le risque *additif* que nous avons déjà vu, il s'ajoute à la richesse :

$$W = \omega + X,$$

le deuxième risque Y est *multiplicatif*, il multiplie la richesse :

$$W = \omega(1 + Y),$$

on l'utilise pour les risques portant sur les taux. Le troisième risque Z généralise les deux précédents, on l'appelle le risque *mixte*. Il ne multiplie qu'une partie de la richesse :

$$W = \omega + \omega_2 Z,$$

On retrouve le risque additif en posant $\omega_2 = 1$:

$$W = \omega + Z,$$

et le risque multiplicatif en posant $\omega_2 = \omega$:

$$W = \omega(1 + Z).$$

On peut également réécrire le risque partiel en décomposant la richesse entre sa partie certaine ω_1 et sa partie risquée ω_2. En utilisant $\omega = \omega_1 + \omega_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} W &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_2 Z \\ &= \omega_1 + \omega_2(1 + Z). \end{aligned}$$

A ces trois risques sont associées trois primes de risques :

- la prime de risque *absolue* correspond au risque additif et est notée π_a;
- la prime de risque *relative* correspond au risque multiplicatif et est notée π_r;
- la prime de risque *partielle* correspond au risque mixte et est notée π_p;
- par défaut, la prime de risque est absolue et le risque additif.

2.5 Expression exacte

Exemple 2.6 (Prime de risque absolue) *On considère un décideur de richesse $\omega = 100€$ de préférences représentées par $u(x) = \sqrt{x}$. Il est confrontée à un risque additif :*

$$X = \begin{cases} -25€ & +75€ \\ 0,5 & 0,5 \end{cases}$$

La richesse aléatoire est donnée par :

$$W = \omega + X = \begin{cases} 75€ & 175€ \\ 0,5 & 0,5 \end{cases}$$

et son espérance mathématique est donnée par :

$$\mathrm{E}(W) = 0,5 \times 75 + 0,5 \times 175 = 125$$

et son équivalent certain est donné par :

$$\overline{w} = \left(0,5 \times \sqrt{75} + 0,5 \times \sqrt{175}\right)^2 \simeq 119,8$$

donc la prime de risque absolue π_a est égale à :

$$\pi_a = \mathrm{E}(W) - \overline{w} = 125 - 119,8 = 5,2€.$$

DÉFINITION 2.6 (PRIME DE RISQUE RELATIVE) *La prime de risque relative π_r est le nombre de points de rendement en proportion (ou %) du capital total auxquels un décideur est prêt à renoncer pour s'affranchir du risque. Elle est définie par :*

$$\begin{aligned} \pi_r \mid u(\mathrm{E}(W) - \omega\pi_r) &= \mathrm{E}(u(W)) \\ &\Leftrightarrow u(\omega(1 + \mathrm{E}(Y) - \pi_r)) = \mathrm{E}(u(\omega(1+Y))) \end{aligned}$$

Exemple 2.7 (Prime de risque relative) *On considère un décideur avec un capital de $\omega = 100€$ et des préférences représentées par $u(x) = \sqrt{x}$. La loterie porte sur le taux de rendement :*

$$Y = \begin{cases} -25\% & +75\% \\ 0,5 & 0,5 \end{cases}$$

le taux de rendement moyen est défini par :

$$\mathrm{E}(Y) = 0,5 \times (-25\%) + 0,5 \times (75\%) = 25\%$$

et l'équivalent certain du taux de rendement $\overline{y}$ est défini par :

$$\begin{aligned} u(\omega(1+\overline{y})) &= \mathrm{E}(u(\omega(1+Y))) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\omega(1+\overline{y})} = 0,5 \times \sqrt{0,75\omega} + 0,5 \times \sqrt{1,75\omega}, \end{aligned}$$

le terme en ω se simplifie et il reste :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\overline{y}} &= 0,5\times\sqrt{0,75}+0,5\times\sqrt{1,75}\simeq 1,0945\\ &\Leftrightarrow\ \overline{y}=(1,0945)^2-1\simeq 0.19793\simeq 19,8\%,\end{aligned}$$

donc la prime de risque relative :

$$\pi_r=\mathrm{E}(Y)-\overline{y}=5,2\%.$$

Le décideur est donc prêt à sacrifier $5,2\%$ de rendement pour passer de l'actif Y à un actif certain. Comme il s'agit du même exemple que pour la prime de risque absolue, on a, de plus :

$$\frac{\pi_a}{\omega}=\frac{5,2}{100}=5,2\%=\pi_r$$

DÉFINITION 2.7 (PRIME DE RISQUE PARTIELLE) *La prime de risque partielle π_p est le nombre de points de rendements en proportion (ou %) du capital risqué auxquels un décideur est prêt à renoncer pour s'affranchir du risque. Elle est définie par :*

$$\begin{aligned}\pi_p\mid u(\mathrm{E}(W)-\omega_2\pi_p) &= \mathrm{E}(u(W))\\ &\Leftrightarrow\ u(\omega_1+\omega_2(1+\mathrm{E}(Z)-\pi_p))=\mathrm{E}(u(\omega_1+\omega_2(1+Z))),\end{aligned}$$

avec $\omega=\omega_1+\omega_2$.

Exemple 2.8 (Prime de risque partielle) *On considère un investisseur avec une richesse certaine $\omega_1=50$, une richesse risquée $\omega_2=50$, des préférences représentées par $u(x)=\sqrt{x}$. Le placement sur la richesse risquée est représenté par la loterie :*

$$Z=\left\{\begin{array}{cc}-50\% & +150\%\\ 0,5 & 0,5\end{array}\right.$$

la richesse aléatoire s'écrit donc :

$$W=\omega_1+\omega_2(1+Z)=\left\{\begin{array}{cc}75 & 175\\ 0,5 & 0,5\end{array}\right.$$

il s'agit de la richesse aléatoire des deux exemples précédents. L'espérance de la loterie est égale à :

$$\mathrm{E}(Z)=0,5\times(\times-50\%)+0,5\times 150\%=50\%$$

et :

$$\mathrm{E}(u(W))=0,5\sqrt{75}+0,5\sqrt{175}=10,945$$

donc la prime de risque partielle doit vérifier :

$$\begin{aligned}\sqrt{50+50(1+50\%-\pi_p)} &= 10,945\\ &\Leftrightarrow\ \sqrt{50+50(1,5-\pi_p)}=10,945\\ &\Leftrightarrow\ \sqrt{125-50\pi_p}=10,945\\ &\Leftrightarrow\ \pi_p=\frac{125-(10,945)^2}{50}\simeq 10,4\%\end{aligned}$$

ainsi le décideur est prêt à sacrifier 10,4% *de rendement sur la partie risquée de la richesse en échange d'un placement certain. On remarque que :*

$$\pi_p \omega_2 = 10,4\% \times 50 = 5,2€ = \pi_a,$$

donc le taux sur la richesse risquée est égal au le double du taux sur la richesse totale parce que la richesse risquée représente la moitié de la richesse totale.

PROPRIÉTÉ 2.3 (PRIMES DE RISQUE) *Les trois défiitions des primes de risque vérifient :*

$$\pi_a = \omega \pi_r = \omega_2 \pi_p,$$

ceci vient de leurs définitions :

$$\mathrm{E}(u(W)) = u(\mathrm{E}(W) - \pi_a) = u(\mathrm{E}(W) - \omega \pi_r) = u(\mathrm{E}(W) - \omega_2 \pi_p),$$

et comme la fonction u est croissante, on a :

$$\mathrm{E}(W) - \pi_a = \mathrm{E}(W) - \omega \pi_r = \mathrm{E}(W) - \omega_2 \pi_p,$$

ce qui implique :

$$\pi_a = \omega \pi_r = \omega_2 \pi_p.$$

Les différentes primes de risque représentent donc le même montant exprimé de manières différentes. Nous avons vu que la prime de risque absolue peut s'écrire en fonction d'un indice d'aversion pour le risque $\mathrm{A}_a(x)$. Nous allons montrer maintenant que l'on peut écrire toutes primes de risque, pour un petit risque, en fonction d'indices d'aversions pour le risque spécifique à chaque risque.

2.6 Expression approchée

Nous avons déjà vu l'expression approché de la prime de risque absolue. Il nous reste donc à voir les expression des primes de risque relative et partielle. Nous utiliserons le développement limité de l'espérance d'utilité (2.2) au voisinage de la richesse moyenne $m = \mathrm{E}(W)$.

2.6.1 Prime de risque relative

La richesse risquée s'écrit :

$$W = \omega(1 + Y)$$

son espérance mathématique est donc donnée par :

$$\mathrm{E}(W) = \omega(1 + \mathrm{E}(Y)) \triangleq m$$

et sa variance par :

$$\mathrm{V}(W) = \mathrm{V}(\omega + \omega Y) = \omega^2 \mathrm{V}(Y),$$

on en déduit que :

$$\mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right)\simeq u\left(m\right)+\frac{\omega^{2}}{2}\,\mathrm{V}\left(Y\right)u''\left(m\right).$$

D'autre part, on a :

$$u\left(m-\omega\pi_{r}\right)=\mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right)$$

en prenant le développement limité d'ordre 1 au voisinage de $\pi_r = 0$, on obtient :

$$u\left(m-\omega\pi_{r}\right)\simeq u\left(m\right)-\pi_{r}\omega u'\left(m\right),$$

de sorte que, en notant $\widetilde{\pi}_r$ l'approximation de la prime de risque relative :

$$u\left(m\right)-\widetilde{\pi}_{r}\omega u'\left(m\right)\simeq u\left(m\right)+\frac{\omega^{2}}{2}\,\mathrm{V}\left(Y\right)u''\left(m\right)$$

en simplifiant, on obtient la prime de risque relative :

$$\widetilde{\pi}_{r}=\frac{\mathrm{V}\left(Y\right)}{2}\times\left(-\omega\frac{u''\left(m\right)}{u'\left(m\right)}\right),$$

L'indice d'aversion relative pour le risque est défini en posant $\mathrm{E}\left(Y\right)=0$ $(\Rightarrow m=\omega)$:

$$\mathrm{A}_{r}\left(x\right)=-x\frac{u''\left(x\right)}{u'\left(x\right)},$$

cet indice est égal à la valeur absolue de l'élasticité de l'utilité marginale de la richesse. Quand la richesse augmente de 1%, l'utilité marginale de la richesse décroît de $A_r\left(x\right)$%.Plus cette élasticité est élevée plus le décideur présente d'aversion relative pour le risque. Remarquons ici que, comme les primes absolues et relatives sont reliées par une contrainte linéaire $\left(\pi_a=\omega\pi_r\right)$, on peut obtenir l'approximation de la prime de risque relative directement. On a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\pi}_{a} &= \omega\widetilde{\pi}_{r}\\
\mathrm{V}\left(W\right) &= \mathrm{V}\left(\omega\left(1+Y\right)\right)=\omega^{2}\,\mathrm{V}\left(Y\right)\\
\widetilde{\pi}_{a} &\simeq \frac{\mathrm{V}\left(W\right)}{2}\times\left(-\frac{u''\left(\mathrm{E}\left(W\right)\right)}{u'\left(\mathrm{E}\left(W\right)\right)}\right)
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\omega\widetilde{\pi}_{r} &\simeq \frac{\omega^{2}\,\mathrm{V}\left(Y\right)}{2}\times\left(-\frac{u''\left(\mathrm{E}\left(W\right)\right)}{u'\left(\mathrm{E}\left(W\right)\right)}\right)\\
&\Leftrightarrow\ \widetilde{\pi}_{r}\simeq\frac{\mathrm{V}\left(Y\right)}{2}\times\left(-\omega\frac{u''\left(\mathrm{E}\left(W\right)\right)}{u'\left(\mathrm{E}\left(W\right)\right)}\right)
\end{aligned}$$

2.6.2 Prime de risque partielle

La richesse risquée s'écrit maintenant:

$$W = \omega_1 + \omega_2 (1 + Z)$$

son espérance mathématique est donc donnée par :

$$\mathrm{E}(W) = \omega_1 + \omega_2 (1 + \mathrm{E}(Z)) \triangleq m$$

et sa variance par :

$$\mathrm{V}(W) = \mathrm{V}(\omega_1 + \omega_2 (1 + Z)) = \omega_2^2 \mathrm{V}(Z),$$

on en déduit que :

$$\mathrm{E}(u(W)) \simeq u(m) + \frac{\omega_2^2}{2} \mathrm{V}(Z) u''(m).$$

D'autre part, on a :

$$u(m - \omega \pi_r) = \mathrm{E}(u(W))$$

en prenant le développement limité d'ordre 1 au voisinage de $\pi_r = 0$, on obtient :

$$u(m - \omega_2 \pi_p) \simeq u(m) - \pi_r \omega_2 u'(m),$$

de sorte que, en notant $\widetilde{\pi}_p$ la prime de risque partielle :

$$u(m) - \widetilde{\pi}_p \omega_2 u'(m) \simeq u(m) + \frac{\omega_2^2}{2} \mathrm{V}(Z) u''(m)$$

en simplifiant, on obtient la prime de risque partielle :

$$\widetilde{\pi}_p = \frac{\mathrm{V}(Z)}{2} \times \left(-\omega_2 \frac{u''(m)}{u'(m)} \right),$$

Remarquons ici que, comme les primes absolues et relatives sont reliées par une contrainte linéaire $(\pi_a = \omega_2 \pi_p)$, on peut obtenir l'approximation de la prime de risque relative directement. On a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\pi}_a &= \omega_2 \widetilde{\pi}_p \\
\mathrm{V}(W) &= \omega_2^2 \mathrm{V}(Z) \\
\widetilde{\pi}_a &\simeq \frac{\mathrm{V}(W)}{2} \times \left(-\frac{u''(\mathrm{E}(W))}{u'(\mathrm{E}(W))} \right)
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\omega_2 \widetilde{\pi}_p &\simeq \frac{\omega_2^2 \mathrm{V}(Z)}{2} \times \left(-\frac{u''(\mathrm{E}(W))}{u'(\mathrm{E}(W))} \right) \\
&\Leftrightarrow \widetilde{\pi}_p \simeq \frac{\mathrm{V}(Z)}{2} \times \left(-\omega_2 \frac{u''(\mathrm{E}(W))}{u'(\mathrm{E}(W))} \right).
\end{aligned}$$

CHAPITRE 3

Les fonctions d'utilité usuelles

Les préférences résument les comportements vis-à-vis du risque. Il est donc important de connaître les caractéristiques des fonctions d'utilité usuelles.

3.1 Les fonctions CRRA

Il s'agit des fonctions d'utilité que se mettent sous la forme d'une puissance :

$$u(x) = \frac{x^{\alpha}}{\alpha},\ \alpha \neq 0.$$

On obtient les cas particuliers suivants :

- $\alpha = 1$: $u(x) = x$, on retrouve le critère d'espérance d'utilité;
- $\alpha \to 0$: $u(x) = \ln(x)$, l'utilité logarithmique. On trouve ce résultat en appliquant la règle de L'Hôpital.[1]
- on peut également prendre des valeurs négatives : $\alpha = -1$ donne $u(x) = -1/x$ qui est une fonction d'utilité classique présentant de l'aversion pour le risque.

Le critère de décision devient :

$$U(W) = \mathrm{E}(u(W)) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{E}(W^{\alpha}).$$

L'utilité marginale est donnée par :

$$u'(x) = x^{\alpha-1} > 0$$

[1] Rappel :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)},\ g'(a) \neq 0.$$

On utilise également :

$$x^{\alpha} = \exp(\alpha \ln x).$$

et la dérivée seconde par :

$$u''(x) = (\alpha - 1)\, x^{\alpha - 2},$$

dont le signe dépend des valeurs de x et α. En supposant que la richesse est positive $x > 0$, on aura :

- $\alpha < 1$: $u''(x) < 0$, utilité concave, préférences riscophobes;
- $\alpha = 1$: $u''(x) = 0$, utilité linéaire, préférences neutres;
- $\alpha > 1$: $u''(x) > 0$, utlité convexe, préférences riscophiles.

L'indice d'aversion absolue face au risque est donné par :

$$\mathrm{A}_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{1-\alpha}{x},$$

il décroît avec la richesse. A partir de cet indice, on peut calculer la prime de risque absolue :

$$\begin{aligned} \pi_a &= \frac{\mathrm{V}(X)}{2} \times \mathrm{A}_a(\mathrm{E}(W)) \\ &= \frac{\mathrm{V}(X)}{2} \frac{1-\alpha}{\omega + \mathrm{E}(X)} \\ &= \frac{1-\alpha}{2} \frac{\mathrm{V}(X)}{\omega + \mathrm{E}(X)}, \end{aligned}$$

cette prime de risque est décroissante avec la richesse et croissante avec la variance de l'aléa. Elle est également décroissante avec le rendement moyen de la partie risquée de la richesse. Une plus forte variance peut donc être compensée par une plus grande espérance de gain. L'indice d'aversion relative face au risque est donné par :

$$\mathrm{A}_r(x) = x \times \mathrm{A}_a(x) = 1 - \alpha,$$

il est constant. C'est cette propriété qui donne son nom à la fonction : Constant Relative Risk Aversion ou CRRA. Cette relation permet également d'interpréter le paramètre α : plus il est élevé, plus l'aversion relative face au risque est faible.

Exemple 3.1 (Assurance) *Considérons l'exemple de l'assurance que nous avons déjà vu :*

$$W = \begin{cases} \omega + (1-\beta)\, z & \omega + v - \beta z \\ p & 1-p \end{cases}$$

L'espérance d'utilité de la richesse avec une fonction CRRA est donnée par :

$$\begin{aligned} U(W) &= \mathrm{E}(u(W)) \\ &= \frac{p}{\alpha}(\omega + (1-\beta)\, z)^{\alpha} + \frac{(1-p)}{\alpha}(\omega + v - \beta z)^{\alpha}, \end{aligned}$$

et la demande d'assurance z^* doit vérifier :

$$\frac{\partial U}{\partial z}\left(z^*\right) = 0,$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned}
p\left(1-\beta\right)\left(\omega+\left(1-\beta\right)z^*\right)^{\alpha-1} &= \left(1-p\right)\beta\left(\omega+v-\beta z^*\right)^{\alpha-1} \\
&\Leftrightarrow \frac{p\left(1-\beta\right)}{\left(1-p\right)\beta} = \left(\frac{\omega+v-\beta z^*}{\omega+\left(1-\beta\right)z^*}\right)^{\alpha-1} \\
&\Leftrightarrow \frac{p\left(1-\beta\right)}{\left(1-p\right)\beta} = \left(\frac{\omega+\left(1-\beta\right)z^*}{\omega+v-\beta z^*}\right)^{1-\alpha} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{p\left(1-\beta\right)}{\left(1-p\right)\beta}\right)^{1/(1-\alpha)} = \frac{\omega+\left(1-\beta\right)z^*}{\omega+v-\beta z^*} \\
&\Leftrightarrow k = \frac{\omega+\left(1-\beta\right)z^*}{\omega+v-\beta z^*}
\end{aligned}$$

avec :

$$k = \left(\frac{p\left(1-\beta\right)}{\left(1-p\right)\beta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
k\left(\omega+v-\beta z^*\right) &= \omega+\left(1-\beta\right)z^* \\
&\Leftrightarrow \left(k-1\right)\omega+kv = \left(1+\left(k-1\right)\beta\right)z^* \\
&\Leftrightarrow z^* = \frac{kv+\left(k-1\right)\omega}{1+\left(k-1\right)\beta}
\end{aligned}$$

On peut alors étudier les déterminants de la demande d'assurance. On voit que :

$$\frac{\partial z^*}{\partial v} = \frac{k}{1+\left(k-1\right)\beta} > 0,$$

le montant de l'assurance augmente avec la valeur du bien risqué. Pour la richesse non risquée, on a :

$$\frac{\partial z^*}{\partial \omega} = \frac{k-1}{1+\left(k-1\right)\beta}.$$

On remarque que le dénominateur de cette expression est positif pour toute valeur positive de k puisque :

$$\begin{aligned}
k &> 0 \Leftrightarrow k-1 > -1 \\
&\Leftrightarrow \left(k-1\right)\beta > -\beta \\
&\Leftrightarrow 1+\left(k-1\right)\beta > 1-\beta > 0 \text{ car } 0 < \beta < 1.
\end{aligned}$$

Donc le signe de la dérivée est donnée par le signe du numérateur. Or nous avons :

$$p < \beta \Leftrightarrow 1-\beta < 1-p,$$

ce qui implique :

$$k=\left(\frac{p\,(1-\beta)}{(1-p)\,\beta}\right)^{1/(1-\alpha)}=\left(\frac{p}{\beta}\times\frac{(1-\beta)}{(1-p)}\right)^{1/(1-\alpha)}<1,$$

donc on aura :

$$\frac{\partial z^*}{\partial\omega}<0,$$

le montant de l'assurance est décroissant avec la richesse. Les décideurs les plus riches préfèrent s'assurer (partiellement) eux-mêmes. Pour des préférences riscophobes $(\forall 0<\alpha<1)$, *la demande d'assurance est croissante avec la valeur du bien assuré* v *et décroissante avec la richesse non risquée du décideur. Pour voir la dépendance par rapport à la probabilité de sinistre, on utilise la dérivation en chaîne :*

$$\frac{\partial z^*}{\partial p}=\frac{\partial z^*}{\partial k}\times\frac{\partial k}{\partial p},$$

car p *n'influence* z^* *que par son action sur* k. *On a :*

$$\frac{\partial z^*}{\partial k}=\frac{(1-\beta)\,v+\omega}{(1+(k-1)\,\beta)^2}>0,\ \forall 0<\beta<1,$$

donc le signe de la dérivée est donné par celui de :

$$\frac{\partial k}{\partial p}=\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1/(1-\alpha)}\frac{1}{(1-p)^2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}>0,$$

ainsi la demande d'assurance est croissante avec la probabilité de sinistre. L'effet du coût de l'assurance implique une dérivée plus complexe que l'on étudiera au cas par cas. On remarque que l'on obtient les résultats associés aux préférences $u\,(x)=\ln x$ *quand* $\alpha\to 0$.

3.2 Les fonctions CARA

Il s'agit des fonctions d'utilité que se mettent sous la forme d'une exponentielle :

$$u\,(x)=-\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\alpha x\right),\ \alpha>0.$$

On obtient les cas particuliers suivants :

- $\alpha\to 0$: $u\,(x)=x$, on retrouve le critère d'espérance d'utilité. On obtient ce résultat en appliquant la règle de L'Hôpital.
- les valeurs de α doivent être positives.

Le critère de décision devient :

$$U(W) = \mathrm{E}(u(W)) = -\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{E}(\exp(-\alpha W)).$$

L'utilité marginale est donnée par :

$$u'(x) = \exp(-\alpha x) > 0$$

et la dérivée seconde par :

$$u''(x) = -\alpha \exp(-\alpha x) < 0,$$

dont le signe est toujours négatif. Ce type de fonctions d'utilité ne peut donc être utilisé que pour représenter des préférences riscophobes. L'indice d'aversion absolue face au risque est donné par :

$$\mathrm{A}_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \alpha,$$

il est constant. C'est cette propriété qui donne son nom à la fonction : Constant Absolute Risk Aversion ou CARA. A partir de cet indice, on peut calculer la prime de risque absolue :

$$\begin{aligned} \pi_a &= \frac{\mathrm{V}(X)}{2} \times \mathrm{A}_a(\mathrm{E}(W)) \\ &= \frac{\alpha\,\mathrm{V}(X)}{2}, \end{aligned}$$

cette prime de risque est croissante avec l'aversion absolue pour le risque α et avec la variance de l'aléa. Elle ne dépend ni du rendement moyen ni de la richesse. L'indice d'aversion relative face au risque est donné par :

$$\mathrm{A}_r(x) = x \times \mathrm{A}_a(x) = \alpha x,$$

il est proportionnel à la richesse.

Exemple 3.2 • *Considérons l'exemple de l'assurance que nous avons déjà vu :*

$$W = \begin{cases} \omega + (1-\beta)z & \omega + v - \beta z \\ p & 1-p \end{cases}$$

L'espérance d'utilité de la richesse avec une fonction CARA est donnée par :

$$\begin{aligned} U(W) &= \mathrm{E}(u(W)) \\ &= -\frac{p}{\alpha}\exp(-\alpha(\omega + (1-\beta)z)) - \frac{(1-p)}{\alpha}\exp(-\alpha(\omega + v - \beta z)), \end{aligned}$$

la condition du premier ordre est donnée par :

$$\frac{\partial U}{\partial z}(z^*) = 0,$$

et l'utilité marginale de l'assurance est égale à :

$$\frac{\partial U}{\partial z}(z) = p(1-\beta)\exp(-\alpha(\omega+(1-\beta)z)) - (1-p)\beta\exp(-\alpha(\omega+v-\beta z))$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} p(1-\beta)\exp(-\alpha(\omega+(1-\beta)z^*)) &= (1-p)\beta\exp(-\alpha(\omega+v-\beta z^*)) \\ &\Leftrightarrow \frac{p(1-\beta)}{(1-p)\beta} = \frac{\exp(-\alpha(\omega+v-\beta z^*))}{\exp(-\alpha(\omega+(1-\beta)z^*))} \\ &\Leftrightarrow \frac{p(1-\beta)}{(1-p)\beta} = \exp(-\alpha(v-z^*)) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \ln\left\{\frac{p(1-\beta)}{(1-p)\beta}\right\} &= -\alpha(v-z^*) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha}\ln\left\{\frac{p(1-\beta)}{(1-p)\beta}\right\} = v-z^* \\ &\Leftrightarrow z^* = v + \frac{1}{\alpha}\ln\left\{\frac{p(1-\beta)}{(1-p)\beta}\right\} \\ &\Leftrightarrow z^* = v - \frac{1}{\alpha}\ln\left\{\frac{(1-p)\beta}{p(1-\beta)}\right\} < v, \forall\beta > p. \end{aligned}$$

et on remarque que :

$$\beta > p \Rightarrow \frac{(1-p)\beta}{p(1-\beta)} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{(1-p)\beta}{p(1-\beta)}\right) > 0$$

en conséquence, on a les propriétés suivantes pour la demande d'assurance basée sur des préférences CARA :

- *elle est indépendante de la richesse non risquée :*

$$\frac{\partial z^*}{\partial \omega} = 0,$$

- *elle est croissante avec la valeur du bien assuré :*

$$\frac{\partial z^*}{\partial v} = 1 > 0,$$

- *elle est croissante avec la probabilité de sinistre :*

$$\frac{\partial z^*}{\partial p} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) > 0$$

- *elle est décroissante avec le montant de la prime (β est le coût unitaire de l'assurance) :*
$$\frac{\partial z^*}{\partial \beta} = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{1-\beta}\right) < 0$$

- *elle est croissante avec le degré d'aversion pour le risque :*
$$\frac{\partial z^*}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha^2} \ln\left(\frac{(1-p)\,\beta}{p\,(1-\beta)}\right) > 0.$$

3.3 L'utilité linéaire de Markowitz

Au début de ce cours, nous avons utilisé la fonction d'utilité suivante :

$$U(W) = \mathrm{E}(W) - k\,\mathrm{V}(W),$$

nous allons maintenant que l'on peut justifier cette forme en appliquant le critère d'espérance d'utilité obtenue sous des hypothèses particulières.

- Hypothèse 1 : les préférences sont représentées par la fonction d'utilité CARA $u(x) = \exp(-\alpha x)$
- Hypothèse 2 : la richesse W suit une loi normale, $W \rightsquigarrow \mathrm{N}(m, \sigma_W^2)$

D'après la seconde hypothèse la variable $Z = \exp(W)$ suit une loi log-normale d'espérance $\exp(m + \sigma_W^2/2)$. D'autre part :

$$\ln\left(Z^{-\alpha}\right) = -\alpha \ln Z \Rightarrow \exp\left(\ln Z^{-\alpha}\right) = \exp(-\alpha \ln Z) = \exp(-\alpha W),$$

et comme $W = \ln Z$ suit une loi normale, $-\alpha \ln Z$ suit également une loi normale de moments :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(-\alpha \ln Z) &= -\alpha\,\mathrm{E}(\ln Z) = -\alpha m, \\
\mathrm{V}(-\alpha \ln Z) &= \alpha^2\,\mathrm{V}(\ln Z) = \alpha^2 \sigma_W^2
\end{aligned}$$

on en déduit que $\exp(-\alpha W) = \exp(\ln Z^{-\alpha})$ suit une loi log-normale d'espérance $\exp(-\alpha m + \alpha^2 \sigma_W^2/2)$. En utilisant la première hypothèse, on obtient l'espérance d'utilité suivante :

$$\begin{aligned}
U(W) &= -\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{E}(\exp(-\alpha W)) \\
&= -\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{E}\left(\exp\left(-\alpha\left(m - \alpha \sigma_W^2/2\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Arrivé à ce stade, on remarque que toute transformation croissante f de la fonction d'utilité représente les mêmes préférences. La quantité $m - \alpha\sigma_W^2$ est transformée par la fonction :

$$f(x) = -\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha x),$$

qui vérifie :

$$f'(x) = \exp(-\alpha x) > 0,$$

donc :

$$U(W) = f\left(m - \alpha\sigma_W^2/2\right), \ f' > 0$$

Et on peut prendre comme fonction d'utilité toute transformée croissante de cette fonction. Comme f est croissante, f^{-1} est également croissante, donc on peut prendre :

$$f^{-1}(U(W)) = m - \frac{\alpha}{2}\sigma_W^2 = \mathrm{E}(W) - \frac{\alpha}{2}\mathrm{V}(W),$$

on retrouve donc la forme espérance-variance de Markowitz en posant $k = \alpha/2$. Dans ce cas particulier k est proportionnel à l'indice d'aversion absolue pour le risque.

La prime de risque absolue présente également une propriété particulière :

$$u(\mathrm{E}(W) - \pi_a) = \mathrm{E}(u(W)),$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha(m - \pi_a)) &= \mathrm{E}\left(-\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha W)\right) \\
\exp(-\alpha(m - \pi_a)) &= \mathrm{E}(\exp(-\alpha W)) \\
\exp(-\alpha(m - \pi_a)) &= \exp\left(-\alpha m + \alpha^2\sigma_W^2/2\right) \\
-\alpha(m - \pi_a) &= -\alpha m + \alpha^2\sigma_W^2/2
\end{aligned}$$

d'où la prime de risque absolue exacte :

$$\pi_a = \frac{\alpha}{2}\mathrm{V}(W),$$

dont l'expression est identique à l'approximation d'Arrow-Pratt.

CHAPITRE 4

La dominance stochastique

Jusqu'à présent nous n'avons utilisé que l'espérance et la variance des loteries pour comparer des variables aléatoires entre elles. Il existe des critères plus généraux qui peuvent également intervenir. En particulier, les critères qui permettent de prendre des décisions qu'elle que soit la fonction d'utilité sont les plus intéressants car ils permettent d'établir des résultats généraux.

4.1 Dominance stochastique d'ordre 1

Nous appliquerons cette notion à la comparaison des richesses aléatoires. Le but est de les classer selon un critère de dominance relié à l'espérance d'utilité.

DÉFINITION 4.1 *Une richesse aléatoire W_1 domine stochastiquement une richesse aléatoire W_2 à l'ordre 1, au sens large, quand :*

$$\Pr\left[W_1 \geq t\right] \geq \Pr\left[W_2 \geq t\right],\ \forall t$$

ce que l'on note :

$$W_1 \underset{S_1}{\succsim} W_2,$$

la dominance a lieu au sens strict quand :

$$\Pr\left[W_1 \geq t\right] \geq \Pr\left[W_2 \geq t\right],\ \forall t \ \textit{et}\ \exists \bar{t} \mid \Pr\left[W_1 \geq \bar{t}\right] > \Pr\left[W_2 \geq \bar{t}\right],$$

ce que l'on note :

$$W_1 \underset{S_1}{\succ} W_2.$$

La probabilité d'être plus riche qu'un seuil donné t avec la loterie W_1 est plus élevée qu'avec la loterie W_2, quel que soit le seuil de richesse t considéré. On peut également la définir à partir des fonctions de répartition des loteries. Soit $F_W(t)$ la fonction de répartition de W. Par définition :

$$F_W(w) = \Pr\left[W < t\right],$$

la fonction utilisée pour définir la dominance stochastique d'ordre 1 est appelée fonction de survie en statistique des durées. On la note :

$$\begin{aligned} S_W(t) &= 1 - F_W(t) \\ &= 1 - \Pr[W < t] \\ &= \Pr[W \geq t], \end{aligned}$$

on peut donc écrire la conditions de dominance stochastique à l'ordre 1 comme :

$$\begin{aligned} S_{W_1}(t) &\geq S_{W_2}(t) \\ &\Leftrightarrow -S_{W_1}(t) \leq -S_{W_2}(t) \\ &\Leftrightarrow 1 - S_{W_1}(t) \leq 1 - S_{W_2}(t) \\ &\Leftrightarrow F_{W_1}(t) \leq F_{W_2}(t), \end{aligned}$$

la richesse aléatoire W_1 domine la richesse W_2 quand sa fonction de répartition de W_1 est située en dessous de la fonction de répartition de W_2. De même on peut définir la domination stochastique à l'ordre 1 au sens strict comme :

$$F_{W_1}(t) \leq F_{W_2}(t) \ \forall t \text{ et } \exists \bar{t} \mid F_{W_1}(\bar{t}) < F_{W_2}(\bar{t}).$$

Exemple 4.1 *Considérons les deux loteries suivantes :*

$$W_1 = \left\{ \begin{array}{c} w \\ 1 \end{array} \right. \quad et \ \ W_2 = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 2w \\ 0,5 & 0,5 \end{array} \right.$$

ces deux loteries sont de même espérance, mais aucune des deux ne domine l'autre. En effet la fonction de répartition de la première loterie est donnée par :

$$F_{W_1}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si\ t < w \\ 1 & si\ t \geq w \end{array} \right.$$

et :

$$F_{W_2}(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & si\ t < 0 \\ 0,5 & si\ 0 \leq t < 2w \\ 1 & si\ t \geq 2w \end{array} \right.$$

donc les deux fonctions se coupent en $t = w$ et aucune loterie ne domine l'autre.

Exemple 4.2 *Considérons les deux loteries suivantes :*

$$W_2 = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 2w \\ 0,5 & 0,5 \end{array} \right. \quad et\ W_3 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 2w & 3w \\ 0,5 & 0,25 & 0,25 \end{array} \right.$$

la fonction de répartition de la loterie W_3 est donnée par :

$$F_{W_3}(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & si\ t < 0 \\ 0,5 & si\ t \leq t < 2w \\ 0,75 & si\ 2w \leq t < 3w \\ 1 & si\ t \geq 3w \end{array} \right.$$

et cette fonction de répartition est toujours située en dessous de celle de W_2, donc :

$$W_3 \underset{S_1}{\succeq} W_2.$$

PROPRIÉTÉ 4.1 *Si la richesse aléatoire W_1 domine W_2 stochastiquement à l'ordre 1 :*

$$\mathrm{E}(W_1) \geq \mathrm{E}(W_2)$$

et si W_1 domine W_2 strictement stochastiquement à l'ordre 1 :

$$\mathrm{E}(W_1) > \mathrm{E}(W_2)$$

La réciproque est fausse.

Il existe plusieurs manière de démontrer cette propriété. Voici la première. Pour la démontrer dans le cas continu, nous allons utiliser la formule suivante, pour une richesse de support $[e, f]$ et de fonction de survie $S(t)$:

$$\mathrm{E}(W) = \int_e^0 (S(t) - 1)\,\mathrm{d}t + \int_0^f S(t)\,\mathrm{d}t$$

avec :

$$S(e) = 1,\ S(f) = 0$$

On remarque que, par définition :

$$S(t) = 1 - F(t) \Rightarrow S'(t) = -F'(t) = -f(t)$$

où $f(t)$ est la densité de W. On a également :

$$F(e) = 1 - S(e) = 0,\ F(f) = 1 - S(f) = 1.$$

Supposons que l'on soit sur l'intervalle des valeurs négatives, $t \in [e, 0]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_e &\triangleq \int_e^0 t\ f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_e^0 t\ F'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

qui est de la forme $\int uv'$. En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_e &= [t\ F(t)]_e^0 - \int_e^0 F(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - e \times 0 - \int_e^0 F(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_e^0 F(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_e^0 (1 - S(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_e^0 (S(t) - 1)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'intervalle des valeurs postives, $t \in [0, f]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_f &= \int_0^f t\ f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^f t\ \left(-S'(t)\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

qui est également de la forme $\int uv'$. En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_f &= \left[-t\ S(t)\right]_0^f + \int_0^f S(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -f \times 0 + 0 + \int_0^f S(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^f S(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Globalement, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W) &= \int_e^f t\ f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_e^0 t\ f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^f t\ f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_e^0 (S(t) - 1)\,\mathrm{d}t + \int_0^f S(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'on ait deux richesses aléatoires, W_1 et W_2, par définition :

$$\begin{aligned} S_1(t) &\geq S_2(t) \\ &\Rightarrow \int_0^f S_1(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^f S_2(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

de plus :

$$\begin{aligned} S_1(t) &\geq S_2(t) \\ &\Leftrightarrow S_1(t) - 1 \geq S_2(t) - 1 \\ &\Rightarrow \int_e^0 (S_1(t) - 1)\,\mathrm{d}t \geq \int_e^0 (S_2(t) - 1)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} S_1(t) &\geq S_2(t) \\ &\Rightarrow \int_e^0 (S_1(t) - 1)\,\mathrm{d}t + \int_0^f S_1(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_e^0 (S_2(t) - 1)\,\mathrm{d}t + \int_0^f S_2(t)\,\mathrm{d}t \\ &\Leftrightarrow \mathrm{E}(W_1) \geq \mathrm{E}(W_2)\,. \end{aligned}$$

Pour démontrer que la réciproque est fausse il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une variable aléatoire telle que $\mathrm{E}(W_1) \geq \mathrm{E}(W_2)$ et $W_1 \not\succeq W_2$. Prenons les deux loteries suivantes :

$$W_1 = \begin{cases} 2 & 4 \\ 1/2 & 1/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad W_2 = \begin{cases} 0 & 3 \\ 1/3 & 2/3 \end{cases}$$

on a :

$$\mathrm{E}(W_1) = 3, \ \mathrm{E}(W_2) = 1$$

et les fonctions de répartition sont données par :

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 2 \\ 1/2 & 2 \leq t < 4 \\ 1 & 4 \leq t \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 2 \\ 1/2 & 2 \leq t < 3 \\ 1/2 & 3 \leq t < 4 \\ 1 & 4 \leq t \end{cases} \\ \text{et } \ F_2(t) &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/3 & 0 \leq t < 3 \\ 1 & 3 \leq t \end{cases} = \begin{cases} 1/3 & 0 \leq t < 2 \\ 1/3 & 2 \leq t < 3 \\ 1 & 3 \leq t < 4 \\ 1 & 4 \leq t \end{cases} \end{aligned}$$

donc on a :

$$F_1(t) = 1/2 > 1/3 = F_2(t) \ \text{ si } 2 \leq t < 3$$

et

$$F_1(t) = 1/2 < 1 = F_2(t) \ \text{ si } 3 \leq t < 4$$

donc il n'y a pas de dominance stochastique.

PROPRIÉTÉ 4.2 *Pour toute fonction d'utilité espérée, vérifiant :*

$$u'(t) \geq 0 \ \text{et} \ \exists \ \bar{t} \mid u'\left(\bar{t}\right) > 0$$

$$W_1 \underset{S_1}{\succeq} W_2 \Rightarrow \mathrm{E}(u(W_1)) \geq \mathrm{E}(u(W_2))$$

la propriété est valable quel que soit le comportement vis-à-vis du risque associé à la fonction $u(t)$. En particulier, si on pose $u(t) = t$, qui vérifie $u'(t) = 1 > 0$, on obtient :

$$W_1 \underset{S_1}{\succeq} W_2 \Rightarrow \mathrm{E}(W_1) \geq \mathrm{E}(W_2).$$

Nous allons démontrer que la condition est suffisante : (1) $\Rightarrow$ (2). On supposera que la richesse W_1 est définie sur le support $[a_1, b_1]$ et W_2 sur le support $[a_2, b_2]$. On a :

$$\begin{aligned} D &\triangleq \mathrm{E}(u(W_1)) - \mathrm{E}(u(W_2)) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} u(t) \ f_1(t) \,\mathrm{d}t - \int_{a_2}^{b_2} u(t) \ f_2(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b u(t) \left(f_1(t) - f_2(t)\right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

avec :

$$a = \min(a_1, a_2),$$

la borne inférieure des supports des deux richesses aléatoires et :

$$b = \max(b_1, b_2),$$

la borne supérieure des deux richesses aléatoires. On a donc :

$$D = \int_a^b u(t)(f_1(t) - f_2(t))\,\mathrm{d}t$$

qui est de la forme $\int uv'$. En intégrant par parties :

$$D = [u(t)(F_1(t) - F_2(t))]_a^b - \int_a^b u'(t)(F_1(t) - F_2(t))\,\mathrm{d}t,$$

comme F_1 et F_2 sont des fonctions de répartition, on a :

$$F_1(a) = 0,\ F_1(b) = 1,\ F_2(a) = 0 \text{ et } F_2(b) = 1,$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} D &= u(b)(1-1) - u(a)(0-0) - \int_a^b u'(t)(F_1(t) - F_2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_a^b u'(t)(F_1(t) - F_2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b u'(t)(F_2(t) - F_1(t))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} F_2(t) - F_1(t) &= (1 - S_2(t)) - (1 - S_1(t)) \\ &= S_1(t) - S_2(t), \end{aligned}$$

de sorte que :

$$D = \int_a^b u'(t)(S_1(t) - S_2(t))\,\mathrm{d}t.$$

Maintenant, supposons que $W_1 \underset{\mathrm{S}_1}{\succeq} W_2$, on a:

$$\begin{aligned} S_1(t) &\geq S_2(t) \\ &\Leftrightarrow S_1(t) - S_2(t) \geq 0 \\ &\Rightarrow u'(t)(S_1(t) - S_2(t)) \geq 0 \text{ car } u'(t) \geq 0 \\ &\Rightarrow \int_a^b u'(t)(S_1(t) - S_2(t))\,\mathrm{d}t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{E}(u(W_1)) \geq \mathrm{E}(u(W_2)). \end{aligned}$$

Cette propriété permet de mieux interpréter le critère d'espérance d'utilité. Par rapport au cas certain, on remplace la comparaison des valeurs certaines de la richesse par la comparaison des probabilités que la richesse dépasse un certain seuil. Toutefois, on ne peut rien dire quand les richesse aléatoires W_1 et W_2 ne sont pas ordonnables selon le critère de dominance stochastique à l'ordre 1.

4.2 Risque et variance

Parmi les avantages qu'il y a à utiliser la variance comme mesure du risque, on peut noter les propriétés suivantes :

- quand la richesse est certaine, la variance est nulle;
- l'espérance d'utilité à la Markowitz, qui fait intervenir l'espérance et la variance;
- les primes de risque approchées dépendent de la variance;

Mais il existe également des arguments contre la variance :

- la variance est une caractéristique objective de la richesse, elle ne dit rien des comportements des décideurs face au risque;
- l'espérance d'utilité à la Markowitz fait des hypothèses fortes. Dans sa version linéaire, il faut que la fonction d'utilité soit CARA et que la richesse suive une loi normale.

En fait, la mesure du risque par la variance peut induire en erreur dans certains cas que nous allons étudier maintenant. Considérons les deux loteries suivantes :

$$W_1 = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 4 \\ 1/2 & 1/2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad W_2 = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 9 \\ 7/8 & 1/8 \end{array} \right.$$

elles ont la même espérance :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W_1) &= \frac{4}{2} = 2 \\ \mathrm{E}(W_2) &= \frac{7+9}{8} = 2 \end{aligned}$$

et les variances sont différentes :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(W_1) &= \frac{1}{2}(0-2)^2 + \frac{1}{2}(4-2)^2 = 4 \\ \mathrm{V}(W_2) &= \frac{7}{8}(1-2)^2 + \frac{1}{8}(9-2)^2 = 7 \end{aligned}$$

au vu de ces premiers résultats, on pourrait penser qu'un agent averse au risque choisirait la loterie W_1 puisqu'elle rapporte la même richesse moyenne que W_2 et que la variance de W_1 est inférieure à celle de W_2. Prenons une fonction d'utilité CRRA avec aversion pour le risque $(\alpha = 1/2 < 1)$, on a :

$$u(x) = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} = 2\sqrt{x},$$

les espérance d'utilité des deux loteries sont égales à :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(u\left(W_1\right)\right) &= \frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{0}\right)+\frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{4}\right)=2\\
\mathrm{E}\left(u\left(W_2\right)\right) &= \frac{7}{8}\times\left(2\sqrt{1}\right)+\frac{1}{8}\times\left(2\sqrt{9}\right)=\frac{10}{4}=2,5
\end{aligned}$$

donc :

$$\mathrm{E}\left(u\left(W_2\right)\right)\geq\mathrm{E}\left(u\left(W_1\right)\right)$$

nous avons trouvé un agent averse au risque qui préfère la loterie de plus forte variance pour le même rendement moyen. Examinons le critère de dominance stochastique. Pour la première loterie :

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1/2 & 0\leq t<4 \\ 1 & 4\leq t \end{cases} = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1/2 & 0\leq t<1 \\ 1/2 & 1\leq t<4 \\ 1 & 4\leq t<9 \\ 1 & 9\leq t \end{cases}\\
\text{et } F_2(t) &= \begin{cases} 0 & t<1 \\ 7/8 & 1\leq t<9 \\ 1 & 9\leq t \end{cases} = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 0 & 0\leq t<1 \\ 7/8 & 1\leq t<4 \\ 7/8 & 4\leq t<9 \\ 1 & 9\leq t \end{cases}
\end{aligned}$$

et l'on voit que les courbes se coupent en $t=1$. Donc on ne peut pas utiliser le critère de dominance stochastique pour comparer ces deux loteries. Comparons maintenant les primes de risque exacte et approchées associées à ces loteries. Pour W_1 :

$$\begin{aligned}
u\left(\mathrm{E}\left(W_1\right)-\pi_1\right) &= \mathrm{E}\left(u\left(W_1\right)\right)\\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{2-\pi_1}=2\\
&\Leftrightarrow \pi_1=1
\end{aligned}$$

et pour W_2 :

$$\begin{aligned}
u\left(\mathrm{E}\left(W_2\right)-\pi_2\right) &= \mathrm{E}\left(u\left(W_2\right)\right)\\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{2-\pi_2}=\frac{10}{4}\\
&\Leftrightarrow \pi_2=\frac{7}{16}=0,4375
\end{aligned}$$

on a donc :

$$\pi_1>\pi_2.$$

donc la prime de risque associée à W_1 est supérieure à celle de W_2. Ceci signifie que le décideur averse au risque est prêt à donner une prime de risque supérieure pour la richesse qui présente la variance la plus faible. Ceci implique que les primes de risque approchées sont fausses. Le coefficient d'Arrow-Pratt est égal à :

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^{-1/2},\ u''(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} \\ \mathrm{A}_a(x) &= -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{1}{2x}, \end{aligned}$$

donc :

$$\mathrm{A}_a(\mathrm{E}(W_1)) = \mathrm{A}_a(\mathrm{E}(W_2)) = \mathrm{A}_a(2) = \frac{1}{4}.$$

Les primes de risque approchées sont donc égales à :

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}_1 &= \frac{\mathrm{V}(W_1)}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1 = \pi_1 \\ \widetilde{\pi}_2 &= \frac{\mathrm{V}(W_2)}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8} > \frac{7}{16} = \pi_2 \end{aligned}$$

on sous-estime le risque de W_1 et on surestime le risque de W_2. De plus, l'ordre est également faux puisque l'on trouve :

$$\widetilde{\pi}_2 > \widetilde{\pi}_1.$$

Il est clair que l'approximation du risque par la variance n'est pas du tout adaptée à cette loterie. Le résultat sur les primes de risque approchées suggère que la qualité de l'approximation laisse à désirer. Considérons l'approximation de l'espérance d'utilité. Pour la fonction d'utilité, on a au voisinage d'un point m :

$$u(x) = u(m) + (x-m)u'(m) + \frac{1}{2}(x-m)^2 u''(m) + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(x-m)^k}{k!}\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k}(m),$$

en prenant l'espérance mathématique de cette expression au voisinage de $m = \mathrm{E}(W)$, on trouve :

$$\mathrm{E}(u(W)) = u(m) + \frac{1}{2}\mathrm{E}\left[(W-m)^2\right]u''(m) + \sum_{k=3}^{+\infty}\mathrm{E}\left[(W-m)^k\right]\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k}(m)$$

et on note :

$$\mu_k \triangleq \mathrm{E}\left[(W - \mathrm{E}(W))^k\right],$$

on remarque que :

$$\mu_2 = \mathrm{V}(W)$$

le moment centré d'ordre k. Globalement :

$$\mathrm{E}(u(W)) = u(\mathrm{E}(W)) + \frac{\mathrm{V}(X)}{2}u''(m) + \sum_{k=3}^{+\infty}\frac{\mu_k}{k!}\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k}(m)$$

donc, pour une loterie quelconque, c'est-à-dire avec des μ_k quelconques, l'approximation n'est bonne que dans les deux cas suivants :

- $u''(x) = 0$. Le cas neutre face au risque, puisque l'on a $\mathrm{E}(u(W)) = u(\mathrm{E}(W))$;
- $u''(x)$ constante, auquel cas $\mathrm{d}^k u/\mathrm{d}x^k = 0 \, \forall k \geq 3$. Ceci correspond aux utilités quadratiques, de type Markowitz.

Dans tous les autres cas, l'espérance d'utilité fait intervenir des moments d'ordre supérieur ou égal à 3. Le moment centré d'ordre 3 permet d'examiner la symétrie d'une distribution :

$$\mu_3 = 0 \Leftrightarrow \; f_W(t) = f_W(-t).$$

Le coefficient d'asymétrie de Fisher est défini par :

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}},$$

si $\gamma_1 > 0$ la queue de distribution située à droite est plus prononcée que celle située à gauche, et l'inverse si $\gamma_1 < 0$, elle est étalée vers la gauche. Examinons les moments centrés d'ordre 3 de nos deux distributions :

$$\begin{aligned} \mu_3(W_1) &= \frac{1}{2}(0-3)^3 + \frac{1}{2}(4-2)^3 = 0 \\ \mu_3(W_2) &= \frac{7}{8}(1-2)^3 + \frac{1}{8}(9-2)^3 = 42 \end{aligned}$$

les coefficient d'asymétrie de Fisher sont égaux à :

$$\begin{aligned} \gamma_1(W_1) &= 0 \\ \gamma_1(W_2) &= \frac{42}{7^{3/2}} = 2,2678 > 0 \end{aligned}$$

donc la distribution de W_2 présente une asymétrie positive, ce qui correspond bien à l'intuition donnée par la loterie. Calculons maintenant l'approximation d'ordre 3 de la prime de risque. On a :

$$u(\mathrm{E}(W) - \widetilde{\pi}_a) \simeq u(m) - \widetilde{\pi}_a u'(m)$$

d'où l'égalité au voisinage d'un petit risque :

$$\begin{aligned} u(m) + \frac{\mathrm{V}(X)}{2} u''(m) + \frac{\mu_3}{6} u'''(m) &\simeq u(m) - \widetilde{\pi}_a u'(m) \\ \frac{\mathrm{V}(X)}{2} u''(m) + \frac{\mu_3}{6} u'''(m) &\simeq -\widetilde{\pi}_a u'(m) \end{aligned}$$

donc :

$$\widetilde{\pi}_a = \frac{\mathrm{V}(X)}{2}\left(-\frac{u''(m)}{u'(m)}\right) + \frac{\mu_3}{6}\left(-\frac{u'''(m)}{u'(m)}\right)$$

et

$$u'(x) = x^{-1/2}, \; u''(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2}, \; u'''(x) = \frac{3}{4} x^{-5/2}$$

donc :

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{1}{2x}, \ -\frac{u'''(x)}{u'(x)} = -\frac{3}{4x^2}$$

et au point moyen :

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{1}{4}, \ -\frac{u'''(x)}{u'(x)} = -\frac{3}{16}$$

ce qui donne les primes de risque approchées suivantes :

$$\widetilde{\pi}_a(W_1) = \frac{1}{2},$$

elle reste inchangée parce que la distribution est symétrique. Par contre, pour W_2, il y a un changement :

$$\widetilde{\pi}_a(W_2) = \frac{7}{2} \times \frac{1}{4} - \frac{42}{6} \times \frac{3}{16} = -\frac{7}{16} = -0,48375,$$

cette fois-ci, on a bien :

$$\widetilde{\pi}_a(W_1) > \widetilde{\pi}_a(W_2),$$

mais l'approximation reste mauvaise. Pour améliorer l'approximation, il faudrait développer l'approximation à un ordre supérieur. Cet exemple montre que l'on ne peut pas toujours approximer le risque par la variance.

4.3 Dominance stochastique d'ordre 2

DÉFINITION 4.2 *Une richesse aléatoire W_1 de fonction de survie $S_1(t)$ domine stochastiquement à l'ordre 2 au sens large une richesse aléatoire W_2 de fonction de survie $S_2(t)$ quand :*

$$\int_{-\infty}^{s} S_1(t)\,dt \geq \int_{-\infty}^{s} S_2(t)\,dt, \ \forall s$$

ce que l'on note :

$$W_1 \underset{S_2}{\succsim} W_2,$$

la dominance a lieu au sens strict quand :

$$\int_{-\infty}^{s} S_1(t)\,dt \geq \int_{-\infty}^{s} S_2(t)\,dt, \ \forall s \ \text{et} \ \exists\, \overline{s} : \int_{-\infty}^{\overline{s}} S_1(t)\,dt > \int_{-\infty}^{\overline{s}} S_2(t),$$

ce que l'on note :

$$W_1 \underset{S_2}{\succ} W_2.$$

On peut écrire la même définition à partir des fonctions de répartition $F_1(t)$ et $F_2(t)$:

$$W_1 \underset{\mathrm{S}_2}{\succsim} W_2 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{s} F_1(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{s} F_2(t)\,\mathrm{d}t, \ \forall s$$

et :

$$W_1 \underset{S_2}{\succ} W_2 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{s} F_1(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{s} F_2(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall s \text{ et } \exists\ \overline{s} : \int_{-\infty}^{\overline{s}} F_1(t)\,\mathrm{d}t < \int_{-\infty}^{\overline{s}} F_2(t)\,.$$

Cette fois-ci la surface située sous la fonction de répartition de la courbe dominante est inférieure à celle de l'autre courbe.

PROPRIÉTÉ 4.3 *La dominance stochastique à l'ordre 1 implique la dominance stochastique à l'ordre 2 :*

$$W_1 \underset{S_1}{\succsim} W_2 \Rightarrow W_1 \underset{S_2}{\succsim} W_2.$$

Ceci vient du fait que :

$$\begin{aligned} S_1(t) - S_2(t) &\geq 0,\ \forall t \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{s} (S_1(t) - S_2(t))\,\mathrm{d}t \geq 0. \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 4.4

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = F(b(x)) - F(a(x))$$

donc

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = b'(x)\,f(b(x)) - a'(x)\,f(b(x))\,.$$

On déduit de la propriété précédente que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{a}^{s} (F_1(t) - F_2(t))\,\mathrm{d}t = F_1(s) - F_2(s)\,.$$

D'autre part, nous avons déjà vu que :

$$\begin{aligned} D &= \mathrm{E}(u(W_1)) - \mathrm{E}(u(W_2)) = \int_a^b (S_1(t) - S_2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b u'(t)\,(S_1(t) - S_2(t))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

et cette fonction est de la forme $\int u'v'$, en intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} D &= [u'v] - \int u''v \\ &= \left[u'(s)\int_a^s (S_1(t) - S_2(t))\,\mathrm{d}t\right]_a^b - \int_a^b u''(s)\left(\int_a^s (S_1(t) - S_2(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\ &= u'(b)\int_a^b (S_1(t) - S_2(t))\,\mathrm{d}t - \underbrace{u'(a)\int_a^a (S_1(t) - S_2(t))\,\mathrm{d}t}_{0} \\ &\quad - \int_a^b u''(s)\left(\int_a^s (S_1(t) - S_2(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 4.5

$$\mathrm{E}(W_1) - \mathrm{E}(W_2) = \int_a^b t\ f_1(t)\,dt - \int_a^b t\ f_2(t)\,dt = \int_a^b (S_1(t) - S_2(t))\,dt$$

Les deux intégrales sont de la forme $\int uv'$, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(W_1) - \mathrm{E}(W_2) &= [tF_1(t)]_a^b - \int_a^b F_1(t)\,\mathrm{d}t - [tF_2(t)]_a^b + \int_a^b F_2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{bF_1(b)}_{1} - \underbrace{aF_1(a)}_{0} - \underbrace{bF_2(b)}_{1} + \underbrace{aF_2(a)}_{0} + \int_a^b (F_2(t) - F_1(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b (F_2(t) - F_1(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b (S_1(t) - S_2(t))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

On en déduit que l'écart des espérances d'utilité est égal à :

$$D = u'(b)\left(\mathrm{E}(W_1) - \mathrm{E}(W_2)\right) - \int_a^b u''(s)\left(\int_a^s (S_1(t) - S_2(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s,$$

pour pouvoir tirer des conclusion sur la base des dérivées secondes il faut supposer l'égalité des espérances, ce qui mène à la définition suivante.

DÉFINITION 4.3 *W_2 est un étalement de W_1 à moyenne constante si :*

$$\mathrm{E}(W_1) = \mathrm{E}(W_2) \ \ \textit{et}\ W_1 \underset{S_2}{\succsim} W_2,$$

PROPRIÉTÉ 4.6 *Si W_2 est un étalement de W_1 à moyenne constante :*

$$\mathrm{E}(u(W_1)) - \mathrm{E}(u(W_2)) = -\int_a^b u''(s)\left(\int_a^s (S_1(t) - S_2(t))\,dt\right) ds$$

et comme :

$$W_1 \underset{S_2}{\succsim} W_2 \Leftrightarrow \int_a^s (S_1(t) - S_2(t))\,dt \geq 0\ \forall s,$$

l'intégrale est du signe opposé à u''. Donc si l'agent est riscophobe :

$$\mathrm{E}(u(W_1)) \geq \mathrm{E}(u(W_2))$$

et si l'agent est riscophile :

$$\mathrm{E}(u(W_1)) \leq \mathrm{E}(u(W_2)).$$

PROPRIÉTÉ 4.7 *Si* $\mathrm{E}(W_1) = \mathrm{E}(W_2)$ *et* $W_1 \underset{S_2}{\succsim} W_2$, *on a :*

$$\mathrm{V}(W_1) \leq \mathrm{V}(W_2).$$

La propriété sur la variance peut se démontrer de la manière suivante. On veut comparer :

$$D = \mathrm{V}(W_1) - \mathrm{V}(W_2) = \mathrm{E}\left(W_1^2\right) - \mathrm{E}(W_1)^2 - \left(\mathrm{E}\left(W_2^2\right) - \mathrm{E}(W_2)^2\right),$$

or $\mathrm{E}(W_1) = \mathrm{E}(W_2)$, donc :

$$D = \mathrm{E}\left(W_1^2\right) - \mathrm{E}\left(W_2^2\right),$$

et, en appliquant la propriété avec la fonction convexe (riscophile) $u(t) = t^2,\ u"(t) = 2 > 0$, on obtient :

$$W_1 \underset{S_2}{\succsim} W_2 \Rightarrow \mathrm{E}\left(W_1^2\right) \leq \mathrm{E}\left(W_2^2\right) \Rightarrow \mathrm{V}(W_1) \leq \mathrm{V}(W_2).$$

On en déduit le résumé suivant.

PROPRIÉTÉ 4.8 (RÉSUMÉ)

1. *Si* $W_1 \underset{S_1}{\succeq} W_2$ *: tous les agents préfèrent* W_1 *à* W_2 *dès que* $u'(t) > 0$, *et l'on a* $\mathrm{E}(W_1) \geq \mathrm{E}(W_2)$.
2. *Si* $W_1 \underset{S_2}{\succeq} W_2$ *:tous les agents riscophobes préfèrent* W_1 *à* W_2 *dès que* $u'(t) > 0$ *et que* $\mathrm{E}(W_1) = \mathrm{E}(W_2)$, *et l'on a* $\mathrm{V}(W_1) \leq \mathrm{V}(W_2)$.

Exemple 4.3 *Voici un cas de dominance stochastique d'ordre 1 :*

$$W_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right.$$

et

$$W_2 = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right.$$

les fonctions de répartition peuvent s'écrire :

$$F_1(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & si\ t < 1 \\ 0 & si\ 1 \leq t < 2 \\ 1/2 & si\ 2 \leq t < 4 \\ 2/3 & si\ 4 \leq t < 6 \\ 1 & si\ 6 \leq t \end{array} \right.$$

et

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 1 \\ 1/4 & si\ 1 \leq t < 2 \\ 1/2 & si\ 2 \leq t < 4 \\ 3/4 & si\ 4 \leq t < 6 \\ 1 & si\ 6 \leq t \end{cases}$$

et l'on voit que :

$$F_1(t) \leq F_2(t) \ \ et\ \exists \bar{t} \in: F_1\left(\bar{t}\right) < F_2\left(\bar{t}\right)$$

donc :

$$W_1 \underset{S_1}{\succ} W_2$$

et l'on peut vérifier les propriétés sur les espérances :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W_1) &= \frac{12}{3} = 4 \\ \mathrm{E}(W_2) &= \frac{13}{4} = 3,25 \end{aligned}$$

cette dominance stochastique implique que tous les agents dont les préférences sont représentables par une utilité espérée vérifiant $u'(t) > 0$ *préfèrent* W_1 *à* W_2. *Cette propriété implique également que :*

$$W_1 \underset{S_2}{\succ} W_2,$$

en effet :

$$\int_0^s F_1(t)\,dt = \begin{cases} 0 & si\ 1 \leq s < 2 \\ 2/3 & si\ 2 \leq t < 4 \\ 2/3 + 4/3 & si\ 4 \leq s < 6 \end{cases} = \begin{cases} 0 & si\ 1 \leq s < 2 \\ 2/3 & si\ 2 \leq t < 4 \\ 2 & si\ 4 \leq s < 6 \end{cases}$$

pour obtenir ces chiffres, on définit la fonction entre 0 *et* 6. *La surface représentée entre* 0 *et* 2 *est nulle, celle représentée entre* 2 *et* 4 *est égale à :*

$$\frac{1}{3} \times (2 - 4) = \frac{2}{3},$$

celle représentée entre 4 *et* 6 *est égale à :*

$$\frac{2}{3} \times (6 - 4) = \frac{4}{3},$$

et celle représentée entre 6 *et* 6 *est nulle. Pour la deuxième richesse, on obtient avec la même méthode :*

$$\int_0^s F_2(t)\,dt = \begin{cases} 1/2 & si\ 1 \leq s < 2 \\ 1/2 + 1 & si\ 2 \leq t < 4 \\ 3/2 + 3/2 & si\ 4 \leq s < 6 \end{cases} = \begin{cases} 1/2 & si\ 1 \leq s < 2 \\ 3/2 & si\ 2 \leq t < 4 \\ 3 & si\ 4 \leq s < 6 \end{cases}$$

et on voit que l'on a :

$$\int_0^s F_1(t)\,dt \leq \int_0^s F_2(t)\,dt \;\; et\; \exists \overline{s} \in: \int_0^{\overline{s}} F_1(t)\,dt < \int_0^{\overline{s}} F_2(t)\;\;dt$$

donc

$$W_1 \underset{S_2}{\succ} W_2.$$

Exemple 4.4 *Voici un cas de dominance stochastique d'ordre 2 sans dominance stochastique d'ordre 1. On compare les deux loteries suivantes :*

$$W_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right.$$

et

$$W_2 = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array} \right.$$

La première propriété à vérifier est l'égalité des espérances mathématiques :

$$\mathrm{E}(W_1) = 4$$

et

$$\mathrm{E}(W_2) = \frac{24}{6} = 4,$$

on peut donc vérifier s'il existe une dominance stochastique d'ordre 2. Les fonctions de répartitions écrites pour une grille commune de valeurs sont égales à :

$$F_1(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & si\; t < 1 \\ 0 & si\; 1 \leq t < 2 \\ 1/3 & si\; 2 \leq t < 3 \\ 1/3 & si\; 3 \leq t < 4 \\ 2/3 & si\; 4 \leq t < 5 \\ 2/3 & si\; 5 \leq t < 6 \\ 1 & si\; 6 \leq t < 7 \\ 1 & si\; 7 \leq t \end{array} \right.$$

et

$$F_2(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & si\; t < 1 \\ 1/6 & si\; 1 \leq t < 2 \\ 1/6 & si\; 2 \leq t < 3 \\ 1/2 & si\; 3 \leq t < 4 \\ 1/2 & si\; 4 \leq t < 5 \\ 5/6 & si\; 5 \leq t < 6 \\ 5/6 & si\; 6 \leq t < 7 \\ 1 & si\; 7 \leq t \end{array} \right.$$

On voit que ces fonctions de répartition se coupent plusieurs fois donc il n'y a pas de dominance stochastique à l'ordre 1. Examinons la surface sous les fonctions de répartition. Comme tous les intervalles sont de longueur égale à 1, on peut cumuler directement les fonctions. De plus on peut enlever les valeurs inférieure à 1 *ou supérieures à* 7 *car les surfaces sous les courbes sont les mêmes pour les deux fonctions de répartition :*

$$\int_0^s F_1(t)\,dt = \begin{cases} 0 & si\ 1 \leq s < 2 \\ 1/3 & si\ 2 \leq s < 3 \\ 2/3 & si\ 3 \leq s < 4 \\ 4/3 & si\ 4 \leq s < 5 \\ 2 & si\ 5 \leq s < 6 \\ 3 & si\ 6 \leq s < 7 \end{cases}$$

et

$$\int_0^s F_2(t)\,dt = \begin{cases} 1/6 & si\ 1 \leq t < 2 \\ 1/3 & si\ 2 \leq t < 3 \\ 5/6 & si\ 3 \leq t < 4 \\ 4/3 & si\ 4 \leq t < 5 \\ 13/6 & si\ 5 \leq t < 6 \\ 3 & si\ 6 \leq t < 7 \end{cases}$$

qui vérifie :

$$\int_0^s F_1(t)\,dt \leq \int_0^s F_2(t)\,dt \ \ et\ \exists \overline{s} \in : \int_0^{\overline{s}} F_1(t)\,dt < \int_0^{\overline{s}} F_2(t)\ \ dt$$

donc :

$$W_1 \underset{S_2}{\succ} W_2,$$

et on peut vérifier la propriété sur les variances :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(W_1) &= \frac{1}{3}(2-4)^2 + \frac{1}{3}(4-4)^2 + \frac{1}{3}(6-4)^2 = \frac{8}{3} \\ \mathrm{V}(W_2) &= \frac{1}{6}(1-4)^2 + \frac{1}{3}(3-4)^2 + \frac{1}{3}(5-4)^2 + \frac{1}{6}(7-4)^2 = \frac{11}{3} > \mathrm{V}(W_1) \end{aligned}$$

CHAPITRE 5

Les choix de portefeuille

Dans ce chapitre, on considère le problème de l'investisseur qui doit choisir entre, d'une part, placer son capital initial certain ω au taux r certain sur un produit de type livret ou, d'autre part, placer son capital ω sur un placement de rendement aléatoire Y de type actions. Si l'investisseur plaçait tout son capital sur le livret, il obtiendrait une richesse certaine égale à :

$$W = \omega (1 + r),$$

et s'il le plaçait intégralement en actions, il obtiendrait une richesse aléatoire :

$$W = \omega (1 + Y),$$

dans le cas général, un investisseur placera une part γ en actions et $1-\gamma$ sur le livret. On notera $m = \gamma\omega$ le montant placé sur le livret et $a = (1-\gamma)\omega$ le montant placé en actions, de sorte que :

$$\omega = \underbrace{m}_{(1-\gamma)\omega} + \underbrace{a}_{\gamma\omega}.$$

Dans ce chapitre, on supposera que le montant du capital à placer ω est donné et que l'on recherche juste la part que l'on place en actif risqué (donc en actif non risqué). Plus généralement, on pourrait envisager le cas de S actifs des parts $\gamma_s,\ s = 1, ..., S$, telles que $\sum_s \gamma_s = 1$. On commencera par traiter le cas $S = 2$, avec un actif risqué et un actif non risqué. La richesse du décideur après placement peut se réécrire :

$$W = m (1 + r) + a (1 + Y) \text{ avec } \omega = m + a$$

que l'on peut exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} W &= m + mr + a + aY \\ &= m + a + mr + aY \\ &= \omega + mr + aY \\ &= \omega \left(1 + \frac{m}{\omega} r + \frac{a}{\omega} Y\right) \end{aligned}$$

or :

$$a = \gamma\omega \text{ et } m = (1 - \gamma)\,\omega,$$

d'où

$$\begin{aligned} W &= \omega\,(1 + (1-\gamma)\,r + \gamma Y) \\ &= \omega\,(1 + \widetilde{r}) \end{aligned}$$

avec :

$$\widetilde{r} = (1-\gamma)\,r + \gamma Y$$

tout se passe donc comme si l'investisseur recevait un rendement moyen égal à la moyenne pondérée des rendements des actifs non risqué et risqué. Il s'agit du taux de rendement du portefeuille. On peut également exprimer le rendement du portefeuille par rapport au rendement certain :

$$\begin{aligned} \widetilde{r} &= r - \gamma r + \gamma Y \\ &= r + \gamma\,(Y - r)\,, \end{aligned}$$

cette écriture rappelle que le risque de rendement $Y - r$ ne s'applique qu'à une fraction γ du portefeuille.

Quand il réalise un placement, l'investisseur peut effectuer des achats et des ventes *à découvert* :

- Achat à découvert : l'investisseur s'endette pour acheter des actions. Il peut s'endetter jusqu'à une capacité de remboursement maximale que nous définirons plus loin.

- Vente à découvert : l'investisseur vend des actions à terme pour augmenter son placement sur le livret. Comme il ne possède pas les actions, il devra les acheter à l'échéance pour pouvoir les vendre. Ici encore, il faudra qu'il vérifie une condition de solvabilité.

- Les achats et les ventes à découvert impliquent que l'on n'a pas forcément $0 \leq a \leq \omega$.

- Dans le modèle de base que nous étudierons nous ferons l'hypothèse simplificatrice que le taux d'intérêt débiteur est égal au taux d'intérêt créditeur. Ceci ne change rien aux résultats de base, d'où ce choix de simplification.

Un décideur peut décider de s'endetter pour placer un capital plus élevé dans un actif risqué. C'est ce que font tous les créateurs d'entreprises : ils s'endettent pour investir dans un actif risqué. Dans leur cas r est ce qu'ils gagnent quand ils ne créent pas d'entreprise et Y ce qu'ils gagnent quand ils le font. Dans ce cas particulier, il est possible que leur capital initial ω soit insuffisant pour monter leur entreprise. Ils vont donc contacter plusieurs banques qui vont évaluer leur projet afin de compléter leur capital initial par un emprunt. S'ils faisaient la même opération sur un marché financier ou sur des titres non cotés en achetant les actions d'un autre entrepreneur, on parlerait de vente à découvert. On ne doit donc pas interpréter la *vente à découvert* comme étant systématiquement associée à la spéculation, même si cela existe aussi. Le montant que l'on peut emprunter à découvert est limité par la capacité de remboursement de l'emprunteur. On pose que le montant investi en actions est borné et l'on note ses bornes de la manière suivante :

$$\underline{a} \leq a \leq \overline{a},$$

de même, on admet que le rendement des actions est borné de la manière suivante :

$$Y \in \left[\underline{y}, \overline{y}\right].$$

Nous allons utiliser l'expression de la richesse aléatoire en fonction du montant placé en actif risqué a :

$$\begin{aligned} W(a) &= m(1+r) + a(1+Y) \\ &= (\omega - a)(1+r) + a(1+Y) \\ &= \omega(1+r) + a(Y-r), \end{aligned}$$

la capacité de remboursement du décideur est définie comme la richesse qui est obtenue sous les conditions les plus défavorables du marché. Ces conditions sont remplies quand le rendement des actions est le plus faible possible $Y = \underline{y}$. Le montant maximal que le décideur peut placer en actif risqué vérifie donc :

$$\omega(1+r) + a\left(\underline{y} - r\right) \geq 0,$$

si l'on admet que :

$$\underline{y} < r < \overline{y},$$

on a l'inégalité :

$$a \leq \omega\left(\frac{1+r}{r-\underline{y}}\right),$$

ce montant maximal est croissant avec la richesse certaine, avec le rendement minimum de l'actif risqué et décroissant avec le rendement de l'actif certain (si $\underline{y} > -1$). Le décideur peut donc placer au maximum :

$$\overline{a} = \omega\left(\frac{1+r}{r-\underline{y}}\right).$$

On remarque qu'il peut placer plus que sa richesse de départ puisque :

$$\begin{aligned} \overline{a} - \omega &= \omega\left(\frac{1+r}{r-\underline{y}} - 1\right) \\ &= \omega\left(\frac{1+\underline{y}}{r-\underline{y}}\right) > 0 \text{ si } \underline{y} > -1. \end{aligned}$$

cette condition signifie que l'investisseur ne peut pas perdre plus que la part risquée du capital, ce qui correspond bien au marché des actions. En cas de défaillance de l'entreprise, l'investisseur n'est responsable qu'à la hauteur des fonds investis, pas à la hauteur des dettes de l'entreprise. Inversement, l'investisseur peut faire une vente à découvert :

- il vend aujourd'hui, à un prix fixé aujourd'hui, un actif qu'il ne possède pas, à une date ultérieure.
- quand la vente arrive à maturité, l'investisseur achète le titre au comptant et le livre à l'acheteur. Si le prix courant est inférieur au prix à terme, l'investisseur fait un gain, sinon il fait une perte.

Ce comportement n'a de sens que si l'investisseur anticipe une baisse des cours. Dans cette optique, l'investisseur peut souhaiter placer plus que ω en actif certain. Pour cela, il vend des actions à terme et empoche l'argent aujourd'hui, après quoi il place le montant en actif certain. Arrivé au terme, il achète les actions avec le produit de son placement certain, et les livre à l'acheteur. La capacité de vente à découvert est limitée par la capacité d'achat de l'investisseur. On retient le cas le plus défavorable : quand le cours des actions est le plus élevé possible $Y = \overline{y}$. La contrainte de solvabilité est donc :

$$\omega (1 + r) + a (\overline{y} - r) \geq 0,$$

on en déduit (avec $\underline{y} \leq r \leq \overline{y}$) :

$$a \geq -\omega \left(\frac{1 + r}{\overline{y} - r} \right),$$

on prend donc comme borne inférieure :

$$\underline{a} = -\omega \left(\frac{1 + r}{\overline{y} - r} \right) < 0$$

cette borne inférieure est négative, ce qui correspond à une vente à découvert. Globalement, nous devrons définir la richesse comme :

$$\begin{gathered} W (a) = \omega (1 + r) + a (Y - r) \\ \text{avec } \underline{a} \leq a \leq \overline{a},\ \underline{a} < 0,\ \overline{a} > \omega \end{gathered}$$

les bornes garantissent que les achats et les ventes à découverts sont solvables. Ce point de départ permet d'examiner les cas de dominance stochastique.

5.1 Les cas de dominance stochastique

Pour étudier les cas de dominance stochastique, il faut déterminer la fonction de répartition de la richesse. Soit :

$$W(a) = \omega(1+r) + a(Y-r),$$

on peut déduire la fonction de répartition de W de celle de Y. Soit F_Y la fonction de répartition de Y et F_a celle de W. On note la fonction de répartition F_a parce que deux richesses différentes se caractérisent par deux valeurs différentes de a pour un même type de placement. On doit distinguer trois cas :

1. $a > 0$:

$$\begin{aligned} F_a(t) &= \Pr[W(a) < t] \\ &= \Pr[\omega(1+r) + a(Y-r) < t] \\ &= \Pr\left[Y < r + \frac{t-\omega(1+r)}{a}\right] \\ &= F_Y\left(r + \frac{t-\omega(1+r)}{a}\right). \end{aligned}$$

2. $a = 0$. Il s'agit du cas où la richesse n'est pas aléatoire :

$$\begin{aligned} F_a(t) &= \Pr[W(a) < t] \\ &= \Pr[\omega(1+r) < t] \\ &= \begin{cases} 0 & t \leq \omega(1+r) \\ 1 & t > \omega(1+r) \end{cases} \end{aligned}$$

3. $a < 0$:

$$\begin{aligned} F_a(t) &= \Pr[W(a) < t] \\ &= \Pr[\omega(1+r) + a(Y-r) < t] \\ &= 1 - F_Y\left(r + \frac{t-\omega(1+r)}{a}\right). \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 5.1 *Si le rendement de l'actif risqué n'est pas borné, les fonctions de répartitions des richesses se croisent et il n'existe pas de relation de dominance stochastique.*

Considérons deux richesses caractérisées par deux montants placés en actif risqué $a = \alpha$ et $a = \beta$. On distingue trois cas possibles.

1. $0 < \alpha < \beta$. Dans ce cas, les fonctions de répartitions sont égales à :

$$F_\alpha(t) = F_Y\left(r + \frac{t-\omega(1+r)}{\alpha}\right) \text{ et } F_\beta(t) = F_Y\left(r + \frac{t-\omega(1+r)}{\beta}\right),$$

on voit que :

$$\begin{aligned}
F_\alpha(t) &< F_\beta(t) \\
&\Leftrightarrow F_Y\left(r+\frac{t-\omega(1+r)}{\alpha}\right) < F_Y\left(r+\frac{t-\omega(1+r)}{\beta}\right) \\
&\Leftrightarrow r+\frac{t-\omega(1+r)}{\alpha} < r+\frac{t-\omega(1+r)}{\beta} \\
&\Leftrightarrow (\beta-\alpha)\,t < (\beta-\alpha)\,\omega(1+r)\,,
\end{aligned}$$

et $\beta-\alpha>0$, ce qui implique :

$$t<\omega(1+r)\,,$$

de la même manière, on montre que :

$$\begin{aligned}
F_\alpha(t) &= F_\beta(t) \Leftrightarrow t=\omega(1+r) \\
F_\alpha(t) &> G_a(t) \Leftrightarrow t>\omega(1+r)\,,
\end{aligned}$$

donc les fonctions de répartition se croisent en $t=\omega(1+r)$. Ici F_β est d'abord au dessus de F_α, puis l'inverse.

2. $\alpha<\beta<0$, on a :

$$\begin{aligned}
F_\alpha(t) &< F_\beta(t) \\
&\Leftrightarrow 1-F_Y\left(r+\frac{t-\omega(1+r)}{\alpha}\right) < 1-F_Y\left(r+\frac{t-\omega(1+r)}{\beta}\right) \\
&\Leftrightarrow F_Y\left(r+\frac{t-\omega(1+r)}{\alpha}\right) > F_Y\left(r+\frac{t-\omega(1+r)}{\beta}\right) \\
&\Leftrightarrow (\beta-\alpha)\,t > (\beta-\alpha)\,\omega(1+r)\,,
\end{aligned}$$

et $\beta-\alpha>0$ donc :

$$t>\omega(1+r)\,,$$

et de la même manière, on montre que :

$$\begin{aligned}
F_\alpha(t) &= F_\beta(t) \Leftrightarrow t=\omega(1+r) \\
F_\alpha(t) &> G_a(t) \Leftrightarrow t<\omega(1+r)\,,
\end{aligned}$$

de sorte que les courbes se croisent en $t=\omega(1+r)$. Ici F_α est d'abord au dessus de F_β, puis l'inverse.

3. $\alpha<0<\beta$. Ici la comparaison directe des fonctions de répartition est moins pratique puisque l'on a inégalité :

$$\begin{aligned}
F_\alpha(t) &< F_\beta(t) \\
&\Leftrightarrow 1-F_Y\left(r+\frac{t-\omega(1+r)}{\alpha}\right) < F_Y\left(r+\frac{t-\omega(1+r)}{\beta}\right),
\end{aligned}$$

nous allons donc utiliser un cas intermédiaire $\alpha \to \beta$ qui implique que $\alpha = \beta = 0$:

$$F_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \omega(1+r) \\ 1 & \text{si } t \geq \omega(1+r) \end{cases}$$

on voit que par définition :

$$\begin{aligned} F_0(t) &< \min(F_\alpha(t), F_\beta(t)) \text{ si } t < \omega(1+r) \\ F_0(t) &> \max(F_\alpha(t), F_\beta(t)) \text{ si } t > \omega(1+r) \end{aligned}$$

Si $\alpha \to 0$, la courbe $F_0(t)$ coupe la courbe $F_\alpha(t)$ car $F_0(t) < F_\alpha(t)$ si $t < \omega(1+r)$ et $F_0(t) > F_\alpha(t)$ si $t > \omega(1+r)$. De même si $\beta \to 0$, $F_0(t)$ coupe la courbe $F_\beta(t)$. Donc $\alpha < 0$ ne domine pas $\beta = 0$ et $\beta > 0$ ne domine pas $\alpha = 0$. De plus, on voit qu'au voisinage de $t = \omega(1+r)$, $F_\alpha(t) = 1 - F_Y(r)$ et $F_\beta(t) = F_Y(r)$, et qu'il n'y a pas d'ordre entre ces deux quantités dans le cas général.

PROPRIÉTÉ 5.2 *Si le rendement de l'actif risqué est borné, $Y \in [\underline{y}, \overline{y}]$, il existe deux cas de dominance stochastique :*

1. *Si $\underline{y} < \overline{y} < r$, la richesse obtenue avec $a = \underline{a}$ domine stochastiquement toutes les autres à l'ordre 1. Un agent riscophile peut donc décider de ne rien investir en bourse, et de vendre des actions à découvert pour augmenter son placement sur livret.*

2. *Si $r < \underline{y} < \overline{y}$, la richesse obtenue avec $a = \overline{a}$ domine stochastiquement toutes les autres à l'ordre 1. Un agent riscophobe peut donc décider de tout investir en bourse, et d'acheter des actions à découvert pour augmenter son placement en bourse.*

Preuve 1. Pour démontrer la première propriété, il suffit de comparer directement les richesses $W(a)$ avec $a > \underline{a}$ quelconque et $W(\underline{a})$, on a :

$$\begin{aligned} W(\underline{a}) - W(a) &= \omega(1+r) + \underline{a}(Y-r) - (\omega(1+r) + a(Y-r)) \\ &= (\underline{a} - a)(Y-r) > 0 \end{aligned}$$

car $a > \underline{a}$ et $Y \leq \overline{y} < r$. Or :

$$W(\underline{a}) > W(a) \Rightarrow \Pr[W(\underline{a}) \geq t] > \Pr[W(a) \geq t], \forall t$$

On aurait également pu utiliser :

$$\begin{aligned} W(\underline{a}) &> W(a) \\ &\Leftrightarrow u(W(\underline{a})) > u(W(a)) \\ &\Rightarrow \mathrm{E}(u(W(\underline{a}))) > \mathrm{E}(u(W(a))). \end{aligned}$$

□

Preuve 2. On utilise la même méthode :

$$W(\overline{a}) - W(a) = (\overline{a} - a)(Y - r),$$

et comme on $a < \overline{a}$ et $Y \geq \overline{y} > r$:

$$W(\overline{a}) - W(a) > 0,$$

dont on déduit que $\Pr[W(\overline{a}) \geq t] > \Pr[W(a) \geq t]$, $\forall t$, et que $\mathrm{E}(u(W(\overline{a}))) > \mathrm{E}(u(W(a)))$.

□

La propriété précédente a plusieurs implications :

- Si $\overline{y} < r$, personne n'investi dans le placement risqué, car le gain maximal possible doit être au moins égal à celui du placement sans risque;
- Si $\underline{y} > r$, personne n'investi dans l'actif certain, car il faut qu'il rapporte au moins le rendement minimum de l'actif risqué;

Ainsi, l'existence simultanée d'un marché de l'actif risqué et de l'actif non risqué implique que le rendement de l'actif certain doit être compris entre les bornes des rendements de l'actif risqué :

$$\underline{y} < r < \overline{y}$$

PROPRIÉTÉ 5.3 *Si le rendement de l'actif certain est égal à l'espérance de rendement de l'actif incertain,* $\mathrm{E}(Y) = r$, *la richesse certaine domine la richesse risquée stochastiquement à l'ordre 2. Tous les agents riscophobes préférent donc ne pas investir dans l'actif risqué.*

Preuve. La fonction de survie de la richesse, pour $a = 0$, est donnée par :

$$S_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \omega(1+r) \\ 0 & \text{si } t > \omega(1+r) \end{cases}$$

et pour $a > 0$:

$$S_a(t) = 1 - F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right).$$

Deux cas se présentent. Soit $s \leq \omega(1+r)$, alors $S_0(t) = 1$, ce qui implique :

$$\int_{\underline{a}}^{s} (S_0(t) - S_a(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\underline{a}}^{s} F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right)\mathrm{d}t > 0,$$

soit $s > \omega(1+r)$ ce qui implique :

$$
\begin{aligned}
\int_{\underline{a}}^{s} \left(S_0(t) - S_a(t)\right) \mathrm{d}t &= \int_{\underline{a}}^{\omega(1+r)} \left(S_0(t) - S_a(t)\right) \mathrm{d}t + \int_{\omega(1+r)}^{s} \left(S_0(t) - S_a(t)\right) \mathrm{d}t \qquad (5.1) \\
&= \int_{\underline{a}}^{\omega(1+r)} F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right) \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_{\omega(1+r)}^{s} \left(1 - F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right)\right) \mathrm{d}t \qquad (5.2) \\
&= \int_{\underline{a}}^{s} F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right) \mathrm{d}t - \left(s - \omega(1+r)\right)
\end{aligned}
$$

et d'autre part :

$$\mathrm{E}\left(W(a)\right) = \omega(1+r) \quad \text{car} \quad \mathrm{E}(Y) = r$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(W(a)\right) &= \int_{\underline{a}}^{0} \left(S_a(t) - 1\right) \mathrm{d}t + \int_{0}^{\overline{a}} S_a(t)\, \mathrm{d}t \\
&= -\int_{\underline{a}}^{0} F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right) \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{0}^{\overline{a}} \left(1 - F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right)\right) \mathrm{d}t \\
&= -\int_{\underline{a}}^{\overline{a}} F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right) \mathrm{d}t + \int_{0}^{\overline{a}} \mathrm{d}t \\
&= \overline{a} - \int_{\underline{a}}^{\overline{a}} F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right) \mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

ce qui implique :

$$\omega(1+r) = \overline{a} - \int_{\underline{a}}^{\overline{a}} F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right) \mathrm{d}t,$$

en reportant dans l'égalité (5.1) , on obtient :

$$
\begin{aligned}
\int_{\underline{a}}^{s} \left(S_0(t) - S_a(t)\right) \mathrm{d}t &= \int_{\underline{a}}^{s} F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right) \mathrm{d}t \\
&\quad - \left(s - \overline{a} + \int_{\underline{a}}^{\overline{a}} F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right) \mathrm{d}t\right) \\
&= -\int_{s}^{\overline{a}} F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right) \mathrm{d}t + \overline{a} - s \\
&= -\int_{s}^{\overline{a}} F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right) \mathrm{d}t + \int_{s}^{\overline{a}} \mathrm{d}t \\
&= \int_{s}^{\overline{a}} \left(1 - F_Y\left(r + \frac{t - \omega(1+r)}{a}\right)\right) \mathrm{d}t > 0.
\end{aligned}
$$

donc :

$$W(0) \underset{S_2}{\succ} W(a) \text{ si } \mathrm{E}(Y) = r,$$

et cette propriété implique que tous les agents riscophobes préfèrent $W(0)$ à $W(a)$.

$\square$

Ce résultat est également valable si $\mathrm{E}(Y) < r$, ce que l'on démontre à partir de la preuve précédente avec la contrainte $\mathrm{E}(W(a)) < \omega(1+r)$ et le même raisonnement. Dans le cas où $\mathrm{E}(Y) > r$, il n'y a pas de dominance à l'ordre 2.

Dans les sections suivantes, nous allons voir que les comportements de diversification ne peuvent être que le fait des agents riscophobes. Nous allons d'abord montrer que les agents neutres et riscophile ne diversifient pas leurs portefeuilles de manière systématique.

5.2 Choix d'un décideur neutre

Dans cette section, nous allons voir que les agents neutres face au risque ne diversifient pas leur portefeuille. Leurs préférences peuvent être représentés par l'espérance mathématique de la richesse, à une transformation affine croissante près. Nous avons donc :

$$U(a) = \mathrm{E}(W(a)) = \omega(1+r) + a(\mathrm{E}(Y) - r),$$

et le décideur doit résoudre le programme :

$$a^* = \arg \max_{\underline{a} \leq a \leq \overline{a}} U(a),$$

comme la fonction objectif est affine, la solution dépend du signe de la pente, égale à $\mathrm{E}(Y) - r$. Nous avons donc trois cas possibles :

1. $\mathrm{E}(Y) - r < 0$, la fonction d'utilité est décroissante en a, donc

$$a^* = \underline{a} = -\frac{\omega(1+r)}{\overline{y} - r} < 0,$$

l'agent neutre effectue une vente à découvert quand le rendement moyen des actions est inférieur à celui du livret;

2. $\mathrm{E}(Y) - r = 0$, la fonction d'utilité ne dépend plus de a, donc la solution est un intervalle :

$$a^* \in [\underline{a}, \overline{a}] = \left[-\frac{\omega(1+r)}{\overline{y} - r}, \frac{\omega(1+r)}{r - \underline{y}} \right],$$

on ne peut pas déterminer précisément le choix de portefeuille de l'agent;

3. $\mathrm{E}(Y) - r > 0$, la fonction d'utilté est croissante en a, donc :

$$a^* = \overline{a} = \frac{\omega(1+r)}{r - \underline{y}} > \omega,$$

l'agent neutre effectue un achat à découvert quand le rendement moyen des actions est supérieur à celui du livret.

Globalement, un agent neutre aurait un comportement de "tout ou rien", qui ne correspond pas au comportement majoritaire observé dans la pratique. On observe que :

- les ménages diversifient leurs placements;
- les changements ne sont pas aussi brutaux quand les taux de rendement se modifient.

On peut donc éliminer le critère d'espérance mathématique pour rendre compte de la réalité.

5.3 Choix d'un décideur riscophile

Nous allons voir que les décideurs riscophiles ne sont pas non plus représentatifs de la réalité. Nous supposerons dans cette section que le décideur admet une fonction d'utilité convexe. Ses préférences sont représentées par :

$$U(a) = \mathrm{E}(u(\omega(1+r) + a(Y-r))),$$

avec $u'(t) > 0$ et $u''(t) > 0$. Par la suite, nous supposerons que l'on peut dériver sous l'intégrale. Ici, la variable d'intégration sera le rendement du placement et les bornes du rendement sont constante $Y \in [\underline{y}, \overline{y}]$. On aura donc des intégrales du type suivant :

$$\mathrm{E}(u(W)) = \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} u(\omega(1+r) + a(y-r)) f_Y(y)\,\mathrm{d}y,$$

et l'on supposera que l'on peut dériver par rapport à a. Dans la mesure ou a n'intervient ni comme variable d'intégration, ni dans les bornes de l'intégrale, nous pourrons prendre l'intégrale de la dérivée par rapport à a. Calculons les dérivées de l'espérance d'utilité :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}(a) = \mathrm{E}[(Y-r)\,u'(\omega(1+r) + a(Y-r))],$$

et

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}a^2}(a) = \mathrm{E}\left[(Y-r)^2\,u''(\omega(1+r) + a(Y-r))\right] > 0$$

car :

$$\begin{aligned} (Y-r)^2 &> 0 \; \forall y \in \left[\underline{y}, \overline{y}\right], \; y \neq r \\ u''(w) &> 0 \; \forall w, \text{ par hypothèse,} \end{aligned}$$

la condition du premier ordre donnerait donc ici un *minimum*. Il ne faut donc pas l'utiliser pour trouver a^*. Comme l'espérance d'utilité est convexe en a, nous aurons toujours une solution en coin située soit en $\underline{a}$ soit en $\overline{a}$, ou une solution sous forme d'intervalle. On distingue les trois cas suivants :

1. $a^* = \underline{a}$ quand :

$$\begin{aligned} U(\underline{a}) &> U(\overline{a}) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{E}\left(u\left(\omega(1+r)+\underline{a}(Y-r)\right)\right) > \mathrm{E}\left(u\left(\omega(1+r)+\overline{a}(Y-r)\right)\right), \end{aligned}$$

dans ce cas le riscophile vend à découvert;

2. $a^* \in [\underline{a}, \overline{a}]$ quand :

$$\begin{aligned} U(\underline{a}) &= U(\overline{a}) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{E}\left(u\left(\omega(1+r)+\underline{a}(Y-r)\right)\right) = \mathrm{E}\left(u\left(\omega(1+r)+\overline{a}(Y-r)\right)\right), \end{aligned}$$

la solution est indéterminée;

3. $a^* = \overline{a}$ quand :

$$\begin{aligned} U(\underline{a}) &< U(\overline{a}) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{E}\left(u\left(\omega(1+r)+\underline{a}(Y-r)\right)\right) < \mathrm{E}\left(u\left(\omega(1+r)+\overline{a}(Y-r)\right)\right), \end{aligned}$$

le riscophile achète à découvert;

Globalement, on retrouve le même type de comportement qu'avec un agent neutre face au risque.

Exemple 5.1 (Fonction de Markowitz) *On peut étudier ce cas plus en détails avec une fonction d'utilité de Markowitz :*

$$U(a) = \mathrm{E}(W(a)) - k\,\mathrm{V}(W(a)), \; k < 0,$$

on a :

$$\mathrm{E}(W(a)) = \omega(1+r) + a(\mathrm{E}(Y) - r)$$

et

$$\mathrm{V}(W(a)) = a^2\,\mathrm{V}(Y),$$

d'où :

$$U(a) = \omega(1+r) + a(\mathrm{E}(Y) - r) - ka^2\,\mathrm{V}(Y).$$

On vérifie que :
$$U'(a) = \mathrm{E}(Y) - r - 2ka\,\mathrm{V}(Y)$$
et
$$U''(a) = -2k\,\mathrm{V}(Y) > 0.$$
On a donc :
$$\begin{aligned} U(\underline{a}) &= \omega(1+r) + \underline{a}(\mathrm{E}(Y) - r) - k\underline{a}^2\,\mathrm{V}(Y), \\ U(\overline{a}) &= \omega(1+r) + \overline{a}(\mathrm{E}(Y) - r) - k\overline{a}^2\,\mathrm{V}(Y), \end{aligned}$$
ce qui implique :
$$U(\overline{a}) - U(\underline{a}) = (\overline{a} - \underline{a})(\mathrm{E}(Y) - r - k(\overline{a} + \underline{a})\,\mathrm{V}(Y)).$$
On aura donc $a^* = \underline{a}$ *quand :*
$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) - r - (\overline{a} + \underline{a})\,k\,\mathrm{V}(Y) &< 0 \\ \mathrm{E}(Y) &< r + \underbrace{k(\overline{a} + \underline{a})\,\mathrm{V}(Y)}_{<0}, \end{aligned}$$
quand le rendement risqué est inférieur au rendement sans risque, l'agent riscophile vend des actions à découvert. Il le fera d'autant plus que son goût pour le risque k *est fort. On retrouve le cas d'indétermination quand :*
$$\mathrm{E}(Y) = r + k(\overline{a} + \underline{a})\,\mathrm{V}(Y),$$
et le cas d'achats à découvert quand le rendement de l'actif risqué est élevé :
$$\mathrm{E}(Y) > r + k(\overline{a} + \underline{a})\,\mathrm{V}(Y),$$
ici encore l'engagement interviendra pour des taux d'autant plus faibles que le goût pour le risque est fort.
Notons également que l'on retrouve le cas du décideur neutre face au risque pour $k = 0$, *de sorte qu'entre la neutralité et la riscophilie, le comportement de base de type "tout ou rien" est similaire, seul le seuil de déclenchement change (*$r + k(\overline{a} + \underline{a})\,\mathrm{V}(Y)$ *au lieu de* r*).*

5.4 Choix d'un décideur riscophobe

La fonction d'utilité est maintenant concave par rapport au montant d'actif risqué a. On peut donc utiliser la condition du premier ordre. Plus précisément :
$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}a^2}(a) = \mathrm{E}\left[(Y - r)^2 u''(\omega(1+r) + a(Y - r))\right] < 0,$$
car $u''(w) < 0$. On définit donc un montant $\widetilde{a}$ solution de la condition du premier ordre :
$$U'(\widetilde{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{E}\left[(Y - r)\,u'(\omega(1+r) + \widetilde{a}(Y - r))\right] = 0$$

et la solution est donnée par :

$$a^* = \begin{cases} \underline{a} & \text{si } \widetilde{a} < \underline{a} \\ \widetilde{a} & \text{si } \underline{a} \leq \widetilde{a} \leq \overline{a} \\ \overline{a} & \text{si } \widetilde{a} > \overline{a} \end{cases}$$

on observe un comportement de diversification des actifs puisque a^* peut prendre, de manière déterminée, toutes les valeurs entre $\underline{a}$ et $\overline{a}$. Dans le cas général, il est possible de se prononcer sur le signe de a^*. En effet, au point $a = 0$, l'utilité marginale de l'investissement risqué est égale à :

$$\begin{aligned} U'(0) &= \mathrm{E}\left(\left(Y - r\right) u'\left(\omega\left(1 + r\right)\right)\right) \\ &= \left(\mathrm{E}\left(Y\right) - r\right) u'\left(\omega\left(1 + r\right)\right) \end{aligned}$$

et l'on voit que :

$$U'(0) \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} 0 \ \text{ si } \ \mathrm{E}(Y) \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} r$$

comme la fonction est concave, cette information suffit à déterminer le signe de a^* en fonction du signe de $\mathrm{E}(Y) - r$. Une fonction concave est croissante avant son maximum a^* et décroissante après. Si $U'(0) > 0$, le maximum est donc situé à une valeur strictement positive de a^*, si $U'(0) < 0$, le maximum est situé à une valeur strictement négative de a^*, et si $U'(0) = 0$, on a forcément $a^* = 0$ car $\underline{a} < 0$ et $\overline{a} > 0$. On en déduit que, pour toute fonction d'utilité concave :

$$a^* \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} 0 \ \text{ si } \ \mathrm{E}(Y) \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} r$$

On retrouve donc deux propriétés intéressantes :

1. Le cas de dominance stochastique d'ordre 2 : si $\mathrm{E}(Y) = r$, tous les riscophobes $(u'' < 0)$ choisissent de ne pas investir dans l'actif risqué $a^* = 0$;

2. Si $\mathrm{E}(Y) < r$, les décideurs riscophobes vendent des actions à découvert pour augmenter leur placement dans l'actif certain. Ils acceptent donc de prendre le risque associé à cette opération.

Exemple 5.2 (fonction de Markowitz) *La fonction d'utilité est donnée par :*

$$\begin{aligned} U(a) &= \mathrm{E}\left(W(a)\right) - k\,\mathrm{V}(Y), \ k > 0 \\ &= \omega\left(1 + r\right) + a\left(\mathrm{E}(Y) - r\right) - ka^2\,\mathrm{V}(Y) \end{aligned}$$

les dérivées sont égales à :

$$\begin{aligned} U'(a) &= \mathrm{E}(Y) - r - 2ka\,\mathrm{V}(Y) \\ U''(a) &= -2k\,\mathrm{V}(Y) < 0, \end{aligned}$$

la condition du premier ordre fournit :

$$\begin{aligned} U'(\widetilde{a}) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{E}(Y) - r - 2k\widetilde{a}\,\mathrm{V}(Y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \widetilde{a} = \frac{\mathrm{E}(Y) - r}{2k\,\mathrm{V}(Y)} \end{aligned}$$

on peut également écrire cette relation d'une autre manière en se souvenant que ce type de fonction d'utilité peut être obtenue par une fonction CARA $u(x) = -\exp(-\alpha x)$ *avec une richesse distribuée selon une loi normale. Dans ce cas* $k = \alpha/2$ *et l'on obtient :*

$$\widetilde{a} = \frac{\mathrm{E}(Y) - r}{\alpha\,\mathrm{V}(Y)} \tag{5.3}$$

où α *est l'indice d'aversion absolue pour le risque d'Arrow-Pratt. Il nous reste à déterminer les deux solutions en coin. Pour la première* $a^* = \underline{a}$*, la condition est :*

$$\begin{aligned} \widetilde{a} &< \underline{a} \\ &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{E}(Y) - r}{\alpha\,\mathrm{V}(Y)} < \underline{a} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{E}(Y) < r + \underline{a}\alpha\,\mathrm{V}(Y), \end{aligned}$$

et en remplaçant $\underline{a}$ *par sa valeur* $-\omega(1+r)/(\overline{y} - r)$ *:*

$$\mathrm{E}(Y) < r - \frac{\alpha\omega(1+r)\,\mathrm{V}(Y)}{\overline{y} - r},$$

si le rendement de l'actif risqué est faible par rapport au rendement de l'actif certain, le décideur riscophobe vend des actions à découvert. Pour la deuxième solution en coin $a^* = \overline{a}$*, la condition est :*

$$\begin{aligned} \widetilde{a} &> \overline{a} \\ &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{E}(Y) - r}{\alpha\,\mathrm{V}(Y)} > \overline{a} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{E}(Y) > r + \overline{a}\alpha\,\mathrm{V}(Y), \end{aligned}$$

et en remplaçant $\overline{a}$ *par sa valeur* $\omega(1+r)/\left(r - \underline{y}\right)$ *:*

$$\mathrm{E}(Y) > r + \frac{\alpha\omega(1+r)\,\mathrm{V}(Y)}{r - \underline{y}},$$

si le rendement de l'actif risqué est élevé par rapport à celui de l'actif certain, le décideur riscophobe achète des actions à découvert. La solution intérieure s'interpréte directement. Si :

$$r - \frac{\alpha\omega(1+r)\,\mathrm{V}(Y)}{\overline{y} - r} \leq \mathrm{E}(Y) \leq r + \frac{\alpha\omega(1+r)\,\mathrm{V}(Y)}{r - \underline{y}},$$

$$a^* = \frac{\mathrm{E}(Y) - r}{\alpha \mathrm{V}(Y)},$$

le décideur riscophobe n'investit dans l'actif risqué que si son rendement moyen est supérieur à celui de l'actif certain. Son investissement est décroissant avec son aversion face au risque α et avec la variance du rendement de l'actif incertain $\mathrm{V}(Y)$.

Revenons maintenant au cas général d'un décideur riscophobe, et examinons comment il est possible de caractériser la solution d'un choix de portefeuille. Pour cela, partons de la définition de la prime de risque :

$$u(\mathrm{E}(W(a)) - \pi(a)) = \mathrm{E}(u(W(a))),$$

donc

$$\max_a u(\mathrm{E}(W(a)) - \pi(a)) \Leftrightarrow \max_a \mathrm{E}(u(W(a))),$$

et comme u est strictement croissante, ceci est équivalent à :

$$\max_a \mathrm{E}(W(a)) - \pi(a),$$

l'utilité est maximale quand l'écart entre l'espérance d'utilité de la richesse et la prime de risque est maximale :

- à espérance donnée, le riscophobe préfère le placement dont la prime de risque est la plus faible
- une variation de a augmente l'utilité si elle augmente plus fortement l'espérance de la richesse que la valeur de la prime de risque.

Cette nouvelle expression de la maximisation de l'espérance d'utilité permet également de réécrire la condition du premier ordre. La dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} U'(a) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(\mathrm{E}(W(a)) - \pi(a)) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(\mathrm{E}(W(a))) - \pi'(a), \end{aligned}$$

de sorte qu'à l'optimum :

$$\underline{a} \leq a^* \leq \overline{a} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(\mathrm{E}(W(a^*))) = \pi'(a^*),$$

le terme de gauche représente le gain marginal d'un Euro de risque supplémentaire, et le terme de droite le coût marginal du risque. Cette condition peut s'interpréter comme une relation d'arbitrage. Supposons que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(\mathrm{E}(W(a))) < \pi'(a)$: ce que rapporte un Euro de risque supplémentaire est inférieur à la prime de risque, on a donc intérêt à réduire le montant placé en actif risqué; inversement si $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(\mathrm{E}(W(a))) > \pi'(a)$, un Euro de risque supplémentaire rapporte plus que la prime de risque, on a donc intérêt à augmenter le montant placé en actif risqué.

Exemple 5.3 (utilité de Markowitz) *Reprenons l'exemple d'une utilité à la Markowitz et calculons la prime de risque associée. On dispose d'une fonction d'utilité :*

$$u(x) = -\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha x),$$

donc la prime de risque $\pi(a)$ *est définie par :*

$$u(\mathrm{E}(W(a)) - \pi(a)) = \mathrm{E}(u(W(a)))$$

soit encore :

$$u(\omega(1+r) + a(\mathrm{E}(Y) - r) - \pi(a)) = \mathrm{E}(u(\omega(1+r) + a(\mathrm{E}(Y) - r)))$$

en remplaçant :

$$-\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha(\omega(1+r) + a(\mathrm{E}(Y) - r) - \pi(a))) = \mathrm{E}\left[-\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha(\omega(1+r) + a(Y - r)))\right],$$

on peut simplifier le terme en $-1/\alpha$ *et sortir le terme certain* $\exp(-\alpha(\omega(1+r)))$ *de l'espérance, de sorte qu'il reste :*

$$\exp(-\alpha(a(\mathrm{E}(Y) - r) - \pi(a))) = \mathrm{E}[\exp(-\alpha a(Y - r))],$$

on peut procéder de même pour le terme en $\exp(\alpha a r)$, *ce qui donne :*

$$\begin{aligned} \exp(-\alpha(a\,\mathrm{E}(Y) - \pi(a))) &= \mathrm{E}[\exp(-\alpha a Y)] \qquad (5.4)\\ \Leftrightarrow\ & \exp(-\alpha a\,\mathrm{E}(Y))\exp(\alpha\pi(a)) = \mathrm{E}[\exp(-\alpha a Y)], \end{aligned}$$

arrivés à ce stade on utilise le fait que Y *suit une loi normale de moyenne* m *et de variance* σ^2, *de sorte que :*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= m_Y,\ \mathrm{V}(Y) = \sigma_Y^2\\ \mathrm{E}(\exp(Y)) &= \exp\left(m_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2}\right), \end{aligned}$$

ce qui implique que $-\alpha a Y$ *suit une loi normale de moments :*

$$\mathrm{E}(-\alpha a Y) = -\alpha a m_Y,\ \mathrm{V}(-\alpha a Y) = \alpha^2 a^2 \sigma_Y^2,$$

donc que $\exp(-\alpha a Y)$ *suit une loi normale d'espérance :*

$$\mathrm{E}(\exp(-\alpha a Y)) = \exp\left(-\alpha a m_Y + \frac{1}{2}\alpha^2 a^2 \sigma_Y^2\right),$$

en reportant dans la relation (5.4) *on obtient :*

$$\exp(-\alpha a m_Y)\exp(\alpha\pi(a)) = \exp\left(-\alpha a m_Y + \frac{1}{2}\alpha^2 a^2 \sigma_Y^2\right),$$

en simplifiant le terme en $\exp(-\alpha a m_Y)$, *l'égalité devient :*

$$\exp(\alpha\pi(a)) = \exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2 a^2 \sigma_Y^2\right),$$

d'où

$$\pi(a) = \frac{\alpha}{2} a^2 \sigma_Y^2,$$

la prime de risque est croissante avec l'aversion relative pour le risque α, *la variance du rendement du placement risqué et le montant investi dans le placement risqué. D'autre part, le rendement marginal du risque est égal à :*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W(a)) &= \omega(1+r) + a(m_Y - r) \\ &\Rightarrow \frac{d}{da}\mathrm{E}(W(a)) = m_Y - r \end{aligned}$$

et la prime de risque marginale à :

$$\pi'(a) = \alpha a \sigma_Y^2, \tag{5.5}$$

d'où le montant investi quand la solution intérieure s'applique :

$$m_Y - r = \alpha a^* \sigma_Y^2 \Leftrightarrow a^* = \frac{m_Y - r}{\alpha \sigma_Y^2},$$

ce qui correspond bien à l'expression (5.3) . *La prime marginale de risque à l'optimum est simplement égale à:*

$$\pi'(a^*) = m_Y - r.$$

Revenons au cas général, la condition du premier ordre s'écrit, en tenant compte du fait que $W^* = W(a^*)$ est aléatoire :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\mathrm{E}(u(W(a^*))) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{E}((Y-r)u'(W^*)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{E}(u'(W^*)Y) - r\,\mathrm{E}(u'(W^*)) = 0 \end{aligned}$$

et :

$$\mathrm{E}(u'(W^*)Y) = \mathrm{Cov}(u'(W^*), Y) + \mathrm{E}(u'(W^*))\,\mathrm{E}(Y),$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(u'(W^*), Y) + \mathrm{E}(u'(W^*))\,\mathrm{E}(Y) - r\,\mathrm{E}(u'(W^*)) &= 0 \\ \mathrm{Cov}(u'(W^*), Y) + \mathrm{E}(u'(W^*))(\mathrm{E}(Y) - r) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à :

$$\mathrm{E}(Y) - r = -\frac{\mathrm{Cov}(u'(W^*), Y)}{\mathrm{E}(u'(W^*))},$$

et comme le terme de gauche est égal à :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\,\mathrm{E}\left(W\left(a\right)\right),$$

on obtient :

$$\pi'\left(a^*\right) = -\frac{\mathrm{Cov}\left(u'\left(W^*\right), Y\right)}{\mathrm{E}\left(u'\left(W^*\right)\right)}.$$

Le membre de droite est le coût marginal du risque, pris à l'optimum :

$$c_{\mathrm{m}}\left(a^*\right) = -\frac{\mathrm{Cov}\left(u'\left(W\left(a^*\right)\right), Y\right)}{\mathrm{E}\left(u'\left(W\left(a^*\right)\right)\right)}$$

Exemple 5.4 (fonction de Markowitz) *L'utilité s'écrit :*

$$u\left(x\right) = -\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\alpha x\right) \Rightarrow u'\left(x\right) = \exp\left(-\alpha x\right),$$

on cherche donc :

$$\mathrm{E}\left(u'\left(W^*\right)\right) = \mathrm{E}\left(\exp\left(-\alpha W^*\right)\right)$$

avec :

$$\begin{aligned} W^* &= \omega\left(1+r\right) + a^*\left(Y - r\right) \\ &\Rightarrow -\alpha W^* = -\alpha\omega\left(1+r\right) - \frac{\left(m_Y - r\right)\left(Y - r\right)}{\sigma_Y^2} \end{aligned}$$

il s'agit d'une variable aléatoire normale de moments :

$$\mathrm{E}\left(-\alpha W^*\right) = -\alpha\omega\left(1+r\right) - \frac{\left(m_Y - r\right)^2}{\sigma_Y^2}, \quad \mathrm{V}\left(-\alpha W^*\right) = \frac{\left(m_Y - r\right)^2}{\sigma_Y^2}$$

donc, sous hypothèse de normalité de W^* *:*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\exp\left(-\alpha W^*\right)\right) &= \exp\left(\mathrm{E}\left(-\alpha W^*\right) + \frac{1}{2}\mathrm{V}\left(-\alpha W^*\right)\right) \\ &= \exp\left\{-\alpha\omega\left(1+r\right) - \frac{\left(m_Y - r\right)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\left(u'\left(W^*\right), Y\right) &= \mathrm{Cov}\left(\exp\left(-\alpha W^*\right), Y\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\exp\left(-\alpha W^*\right) Y\right) - \mathrm{E}\left(\exp\left(-\alpha W^*\right)\right)\mathrm{E}\left(Y\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\exp\left(-\alpha W^*\right) Y\right) - \exp\left\{-\alpha\omega\left(1+r\right) - \frac{\left(m_Y - r\right)^2}{2\sigma_Y^2}\right\} \times m_Y \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(-\alpha W^*\right) Y\right) = \int \exp\left\{-\alpha\omega\left(1+r\right) - \frac{\left(m_Y - r\right)\left(y - r\right)}{\sigma_Y^2}\right\} y f\left(y\right) dy$$

avec $Y \rightsquigarrow \mathrm{N}\left(m_Y, \sigma_Y^2\right)$ *:*

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right).$$

le terme dans l'exponentielle peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}
A &= -\alpha\omega(1+r) - \frac{(m_Y-r)(y-r)}{\sigma_Y^2} - \frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \\
&= -\alpha\omega(1+r) - \frac{1}{2\sigma_Y^2}\left(2m_Y y - 2m_Y r - 2ry + 2r^2 + \left(y^2 - 2ym_Y + m_Y^2\right)\right) \\
&= -\alpha\omega(1+r) - \frac{1}{2\sigma_Y^2}\left(m_Y^2 - 2m_Y r + r^2 + y^2 - 2ry + r^2\right) \\
&= -\alpha\omega(1+r) - \frac{1}{2\sigma_Y^2}\left((m_Y-r)^2 + (y-r)^2\right)
\end{aligned}$$

donc :

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(-\alpha W^*\right)Y\right) = \exp\left\{-\alpha\omega(1+r) - \frac{(m_Y-r)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}\int\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}y\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_Y^2}(y-r)^2\right\}dy$$

Oon effectue le changement de variable suivant dans l'intégrale :

$$z = y - r,$$

de sorte que :

$$y = z + r \text{ et } dy = dz$$

et les bornes de l'intégrale sont inchangées. On obtient

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}y\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_Y^2}(y-r)^2\right\}dy &= \int(z+r)\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma_Y^2}\right\}dz \\
&= \int(z+r)f_Z(z)\,dz \\
&= \int zf_Z(z)\,dz + r\int f_Z(z)\,dz
\end{aligned}$$

or $f_Z(z)$ *est la densité d'une loi normale* $\mathrm{N}\left(0, \sigma_Y^2\right)$ *donc :*

$$\int zf_Z(z)\,dz = 0 \text{ et } \int f_Z(z)\,dz = 1$$

d'où :

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(-\alpha W^*\right)Y\right) = r\exp\left\{-\alpha\omega(1+r) - \frac{(m_Y-r)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}$$

et la covariance :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}\left(u'\left(W\left(a^*\right)\right),Y\right) &= r\exp\left(-\alpha\omega\left(1+r\right)-\frac{\left(m_Y-r\right)^2}{2\sigma_Y^2}\right)-m_Y\exp\left(-\alpha\omega\left(1+r\right)-\frac{\left(m_Y-r\right)^2}{2\sigma_Y^2}\right)\\ &= \left(r-m_Y\right)\exp\left(-\alpha\omega\left(1+r\right)-\frac{\left(m_Y-r\right)^2}{2\sigma_Y^2}\right)<0 \text{ car } m_Y>r\end{aligned}$$

Cette covariance est négative car une hausse du rendement de l'actif risqué augmente la richesse dont l'utilité marginale est décroissante. On vérifie que l'on a également :

$$c_m\left(a^*\right)=-\frac{\operatorname{Cov}\left(u'\left(W\left(a^*\right)\right),Y\right)}{\operatorname{E}\left(u'\left(W\left(a^*\right)\right)\right)}=-\left(r-m_Y\right)\frac{\exp\left(-\alpha\omega\left(1+r\right)-\frac{\left(m_Y-r\right)^2}{2\sigma_Y^2}\right)}{\exp\left(-\alpha\omega\left(1+r\right)-\frac{\left(m_Y-r\right)^2}{2\sigma_Y^2}\right)}=m_Y-r.$$

A l'optimum le coût marginal du risque est égal à la prime de risque :

$$\pi'\left(a^*\right)=c_{\mathrm{m}}\left(a^*\right),$$

ces deux fonctions sont aussi égales en $a=0$. A l'optimum, tous les décideurs ont la même prime marginale de risque, ce sont les montants investis a^* qui sont différents. Comme on a :

$$\operatorname{E}\left(Y\right)-r=\pi'\left(a^*\right),$$

on peut écrire :

$$\operatorname{E}\left(Y\right)=r+\pi'\left(a^*\right),$$

le rendement de l'actif risqué se décompose entre le rendement de l'actif certain et une prime marginale de risque.

Il nous reste à examiner comment a^* varie avec la richesse certaine ω, dans le cas général. La condition du premier ordre s'écrit :

$$\operatorname{E}\left(u'\left(\omega\left(1+r\right)+a^*\left(Y-r\right)\right)\left(Y-r\right)\right)=0,$$

ce que l'on peut écrire :

$$H\left(a^*,\omega,r,F_Y\right)=0, \tag{5.6}$$

où F_Y est la fonction de répartition de Y. A partir de cette fonction de répartition, on peut calculer :

$$\begin{aligned}\operatorname{E}\left(Y\right) &= \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} y\mathrm{d}F_Y\left(y\right)=\int_{\underline{y}}^{\overline{y}} y\ f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y\\ \operatorname{E}\left(W^*\left(Y\right)\right) &= \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} W^*\left(y\right)\mathrm{d}F_Y\left(y\right)=\int_{\underline{y}}^{\overline{y}} W^*\left(y\right)\ f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

et nous recherchons l'effet toutes choses égales par ailleurs de ω. On suppose donc que r et F_Y sont constants. En effectuant le développement limité de la relation (5.6), on obtient :

$$\mathrm{d}H=\frac{\partial H}{\partial a^*}\mathrm{d}a^*+\frac{\partial H}{\partial\omega}\mathrm{d}\omega,$$

or, à l'optimum $H = 0 \Rightarrow \ \mathrm{d}H = 0$, donc :

$$\frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial \omega}}{\dfrac{\partial H}{\partial a^*}}$$

avec :

$$H(a^*, \omega, r, F_Y) = \frac{\partial}{\partial a^*} \mathrm{E}\left(u\left(W\left(a^*\right)\right)\right)$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial a^*} &= \frac{\partial}{\partial a^*} \mathrm{E}\left[u'\left(\omega(1+r) + a^*(Y-r)\right)(Y-r)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[u''\left(W^*\right)(Y-r)^2\right], \end{aligned}$$

et pour un riscophobe $u''(W^*) < 0$ donc :

$$\frac{\partial H}{\partial a^*} < 0,$$

ainsi $\mathrm{d}a^*/\mathrm{d}\omega$ est de même signe que $\partial H/\partial \omega$. Examinons cette dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \mathrm{E}\left[u'\left(\omega(1+r) + a^*(Y-r)\right)(Y-r)\right] \\ &= (1+r)\,\mathrm{E}\left[u''\left(W^*\right)(Y-r)\right], \end{aligned} \tag{5.7}$$

pour un agent riscophobe $u'' < 0$ mais $Y - r$ peut prendre n'importe quel signe. Il va nous falloir examiner trois cas :

1. Aversion absolue pour le risque constante avec la richesse. Correspond aux utilités CARA. Par hypothèse :

   $$A_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \alpha,$$

   ce que l'on réécrit :

   $$u''(W) = -\alpha u'(W),$$

   en reportant dans (5.7) :

   $$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \omega} &= (1+r)\,\mathrm{E}\left[-\alpha u'\left(W^*\right)(Y-r)\right] \\ &= -\alpha(1+r)\,\mathrm{E}\left[u'\left(W^*\right)(Y-r)\right] \end{aligned}$$

   et en a^* :

   $$\mathrm{E}\left[u'\left(W^*\right)(Y-r)\right] = 0,$$

   on en déduit que :

   $$\frac{\partial H}{\partial \omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}\omega} = 0,$$

   le montant investi dans l'actif risqué est indépendant de la richesse. Si l'on veut étudier les effets de la richesse ω sur les choix de portefeuille a^*, il ne faut donc pas utiliser de fonction CARA.

2. Aversion absolue pour le risque décroissante avec la richesse. Ce cas correspond notamment aux utilités CRRA. Par hypothèse :

$$A_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} > 0 \text{ est décroissante avec } x,$$

par exemple pour une utilité CRRA de type $u(x) = x^\alpha/\alpha$, on aura :

$$A_a(x) = \frac{1-\alpha}{x},$$

c'est un des cas particulier possibles de l'hypothèse de départ. En utilisant :

$$u''(x) = -A_a(x)\, u'(x),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \omega} &= (1+r)\,\mathrm{E}\left[-A_a(W^*)\, u'(W^*)(Y-r)\right] \qquad (5.8) \\ &= (1+r)\,\mathrm{E}\left[A_a(W^*)\, u'(W^*)(r-Y)\right] \end{aligned}$$

avec

$$A_a(W^*) > 0 \text{ et } u'(W^*) > 0$$

le terme situé à l'intérieur de l'espérance sera donc positif si $Y < r$, nul si $Y = r$ et négatif si $Y > r$. D'autre part :

$$\mathrm{E}\left[u'(W^*)(Y-r)\right] = 0,$$

par rapport à ce cas, la condition (5.8) modifie la pondération de l'espérance par rapport à F_Y. Elle donne une pondération élevée quand W^* est faible et une pondération faible quand W^* est élevée. Or W^* prend une valeur faible quand $a^* > 0$ et $Y - r < 0$. Dans ce cas, $A_a(W^*)\, u'(W^*)(r-Y)$ est positif. On en déduit que :

$$a^* > 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}\omega} > 0,$$

De plus, W^* prend une valeur faible dans le cas symétrique où $a^* < 0$ et $Y - r > 0$. Dans ce cas, $A_a(W^*)\, u'(W^*)(r-Y)$ est négatif. On en déduit que :

$$a^* < 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}\omega} < 0,$$

ce que l'on peut résumer par :

$$\frac{\mathrm{d}\,|a^*|}{\mathrm{d}\omega} > 0,$$

la valeur absolue du placement en actif risqué est croissante avec la richesse initiale.

3. Aversion absolue pour le risque croissante avec la richesse. Ce cas correspond notamment aux utilités quadratiques. Par hypothèse :

$$A_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} > 0 \text{ est croissante avec } x,$$

par exemple pour une utilité quadratique

$$u(x) = \begin{cases} x - \frac{\beta}{2}x^2 & \text{si } x \leq 1/\beta \\ 1/(2\beta) & \text{si } x > 1/\beta \end{cases}$$

on aura :

$$A_a(x) = \frac{\beta x}{1 - \beta x}$$

qui est croissante en x. Ce cas est le symétrique du précédent, on aura donc :

$$\frac{\mathrm{d}\,|a^*|}{\mathrm{d}\omega} < 0,$$

la valeur absolue du placement en actif risqué est décroissante avec la richesse initiale.

CHAPITRE 6

La demande d'assurance

Dans ce chapitre nous allons voir comment modéliser un problème d'assurance et déterminer le niveau de couverture optimal, du point de vue de l'assuré. Un contrat d'assurance vise à transférer un risque d'un particulier ou d'une entreprise vers une compagnie d'assurance. Il s'agit d'une protection, souvent partielle, contre les conséquences d'un sinistre.

- A proprement parler, on ne se protège pas contre le sinistre lui-même puisqu'il peut toujours arriver. On se protège uniquement contre les conséquences financière du sinistre. S'il survient, on reçoit l'indemnité prévue par le contrat d'assurance;

- En échange de ce transfert (financier) du risque, doit verser une prime d'assurance, que le sinistre ait lieu ou non.

Considérons un agent donc la richesse initiale est $\omega = \omega_1 + \omega_2$ où ω_1 est la part de la richesse qui ne subit aucun risque et ω_2 la part de la richesse qui est risquée. On dit que ω_2 peut faire l'objet d'un sinistre. On suppose que ce sinistre peut se représenter par un taux de perte $Z \in [-1, 0]$. Si $z = -1$ se réalise, on perd la totalité de ω_2, si $z = 0$ se réalise, le sinistre n'a pas lieu. La richesse finale s'écrit :

$$W = \omega_1 + \omega_2 (1 + Z) .$$

Dans ce chapitre nous prendrons les notations suivantes, plus spécifiques à l'assurance. La part de la richesse qui fait l'objet d'un risque sera notée ℓ donc $\omega_2 = \ell$. La partie non risquée de la richesse est notée w donc $\omega_1 = w$. Par rapport aux notations antérieures on a donc $\omega = w + \ell$. Le taux de sinistre (ou taux de "sinistralité") est le pourcentage de pertes noté positivement, noté X, avec $X = -Z$, $X \in [0, 1]$. Sa densité de probabilité est notée $f(x)$. On remarque donc ici que le taux est la variable aléatoire. En cas de sinistre, le décideur perd donc ℓX. On en déduit la richesse totale après réalisation de l'aléa :

$$W = w + \ell - \ell X = w + \ell (1 - X)$$

Le contrat d'assurance ou police d'assurance, prend la forme d'un contrat qui spécifie toutes les conditions associées à l'assurance et, particulièrement, l'indemnité que l'assureur doit versé à l'assuré en cas de sinistre, et le prime que l'assuré doit verser à l'assureur.

L'indemnité que verse l'assureur, notée I, est souvent fonction du montant du sinistre. C'est donc une variable aléatoire que l'on peut écrire :

$$I = g(\ell X) \geq 0.$$

Cette fonction vérifie deux propriétés :

- Le principe indemnitaire :

$$I = g(\ell X) \leq \ell X \text{ et } g(0) = 0,$$

  il n'y a pas d'indemnité en absence de sinistre et l'indemnité ne peut pas dépasser le montant du sinistre;

- L'indemnité est croissante au sens large avec le dommage subit. S'il y a un plafond la dérivée est nulle, sinon elle est croissante : $g'(z) \geq 0, \ \forall z$.

La prime que verse l'assuré est notée $b > 0$. Cette prime est perçue par la compagnie d'assurance et constitue donc la recette de l'assureur. Cette prime se base notamment sur les montants que l'assureur doit rembourser en moyenne aux assurés, $\mathrm{E}(I)$. On dit que $\mathrm{E}(I)$ est la prime pure. Toutefois, la prime pure ne suffit pas pour que la compagnie d'assurance dégage un bénéfice. Deux autre éléments doivent être pris en compte : les coûts de gestion et le risque de défaut.

Pour faire face à ses frais de gestion, la compagnie d'assurance va appliquer un taux λ_g de sorte que la prime à payer prendra la forme $(1+\lambda_g)\mathrm{E}(I)$. Mais ceci ne suffit pas car le montant des indemnités I est une variable aléatoire et que sa réalisation peut être éloignée de $\mathrm{E}(I)$. La compagnie doit également faire face à la probabilité de ne pas pouvoir payer l'indemnité. Elle va donc appliquer un autre taux, λ_s, appelé le chargement de sécurité. Supposons que la compagnie fixe une prime égale à :

$$b = (1+\lambda_s)\mathrm{E}(I),$$

la probabilité qu'elle ne puisse pas rembourser est donnée par :

$$\begin{aligned} \Pr[I > b] &= \Pr[I > (1+\lambda_s)\mathrm{E}(I)] \\ &= 1 - F_I[(1+\lambda_s)\mathrm{E}(I)], \end{aligned}$$

où F_I est la fonction de répartition de l'indemnité (une variable aléatoire fonction du sinistre X). Soit γ la probabilité de défaut (très faible) acceptée par la compagnie d'assurance :

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 - F_I[(1+\lambda_s)\mathrm{E}(I)] \\ &\Leftrightarrow 1-\gamma = F_I[(1+\lambda_s)\mathrm{E}(I)] \\ &\Leftrightarrow \lambda_s = \frac{F_I^{-1}(1-\gamma)}{\mathrm{E}(I)} - 1, \end{aligned}$$

en fixant ce taux de chargement, la compagnie peut contrôler le risque de défaut. Globalement, la prime doit tenir compte à la fois des frais de gestion et de la sécurité, elle appliquera donc un taux global λ quit tient compte des deux élements précédents :

$$\lambda = \lambda_g + \lambda_s$$

et la prime sera égale à :

$$b = (1+\lambda)\,\mathrm{E}\,(I) = (1+\lambda)\,\mathrm{E}\,(g\,(\ell X))\,,$$

la richesse d'un décideur assuré prendra donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} W &= w + \ell\,(1-X) + I - b \\ &= w + \ell\,(1-X) + g\,(\ell X) - (1+\lambda)\,\mathrm{E}\,(g\,(\ell X))\,. \end{aligned}$$

Etudier la demande d'assurance revient à rechercher la fonction g^* qui donne la demande d'assurance du consommateur. Le critère de choix est l'espérance d'utilité. On distingue deux types de contrats : les contrats de co-assurance et les assurances avec franchise.

Dans un contrat de co-assurance, l'assuré et l'assureur font tous les deux des pertes en cas de sinistre. Ceci est équivalent à dire que l'assureur ne rembourse qu'une fraction du sinistre. On représentera ce cas par la forme :

$$I = g\,(\ell X) = a.\ell X,\ 0 \leq a \leq 1,$$

une fonction linéaire du sinistre. Le paramètre a est appelé le taux de couverture. Rechercher une demande d'assurance dans ce cas revient à rechercher le taux de couverture que choisira l'assuré. On ne s'assure pas quand le taux de couverture optimal est $a^* = 0$ et on choisit une assurance complète quand $a^* = 1$.

Une franchise est définie comme le montant qui reste à la charge de l'assuré en cas de sinistre. On a donc, en notant d la franchise :

$$I = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell X \leq d \\ \ell X - d & \text{si } \ell X > d \end{cases}$$

ce que l'on note de manière compacte :

$$I = \max\,(0, \ell X - d)\,,$$

si la franchise est nulle $d = 0$ et $I = \ell X$, on obtient une assurance complète. On doit également avoir $d \in [0, \ell]$. En effet, en $d = \ell$, l'indemnité versée est nulle puisque :

$$I = \ell X - d = \ell\,(X - 1) \leq 0 \text{ car } X \in [0,1]\,.$$

6.1 Le contrat de co-assurance

Dans cette section, nous supposerons donc que :

$$I = g(\ell X) = a\ell X,$$

la prime s'écrit donc :

$$\begin{aligned} b &= (1+\lambda)\,\mathrm{E}(I) \\ &= (1+\lambda)\,\mathrm{E}(g(\ell X)) \\ &= (1+\lambda)\,\mathrm{E}(a.\ell X) \\ &= (1+\lambda)\,a\ell\,\mathrm{E}(X), \end{aligned}$$

et la richesse aléatoire est donnée par :

$$\begin{aligned} W(a) &= w + \ell(1-X) + I - b \\ &= w + \ell(1-X) + a\ell X - (1+\lambda)\,a\ell\,\mathrm{E}(X), \end{aligned}$$

la notation en $W(a)$ fait apparaître la variable de décision pour l'assuré : a, le taux de couverture. On recherchera donc une valeur du taux de couverture a qui maximise l'espérance d'utilité de la richesse $W(a)$.

Nous commencerons par examiner les cas de dominance stochastique car ils fournissent des résultats valables quelle que soit la fonction d'utilité. Ici, on se concentre sur les riscophobes car le marché de l'assurance n'a de sens que pour eux.

6.1.1 Les cas de dominance stochastique

Il existe un seul cas de dominance stochastique à l'ordre 1 et pas de cas de dominance stochastique à l'ordre 2. Le cas de dominance stochastique à l'ordre 1 survient dans la situation où la prime qu'il faut verser est supérieure à la valeur maximale de l'indemnité. L'indemnité est égale à $a\ell X$ et elle est maximale quand $X = 1$. Ce cas arrive quand :

$$\begin{aligned} b &\geq a\ell \\ &\Leftrightarrow (1+\lambda)\,a\ell\,\mathrm{E}(X) \geq a\ell \\ &\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{1}{\mathrm{E}(X)} - 1 = \overline{\lambda}, \end{aligned}$$

le paramètre $\overline{\lambda}$ représente le taux maximal possible de chargement. Si les chargements de gestion et de risque sont trop élevés, la richesse sans assurance domine stochastiquement la richesse avec assurance à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} W(0) &= w + \ell(1-X) \\ W(a) &= w + \ell(1-X) + \underbrace{I - b}_{\leq 0} \end{aligned}$$

donc

$$W(0) \geq W(a), \ \forall a$$

ce qui implique, si l'utilité est croissante, $u'(w) > 0$:

$$\begin{aligned} u(W(0)) &\geq u(W(a)), \ \forall a \\ &\Rightarrow \mathrm{E}(u(W(0))) \geq \mathrm{E}(u(W(a))), \ \forall a. \end{aligned}$$

On peut également reformuler le problème en disant qu'il existe une prime maximum au delà de laquelle personne ne s'assure :

$$\begin{aligned} \overline{b} &= \left(1+\overline{\lambda}\right) a\ell \, \mathrm{E}(X) \\ &= \frac{1}{\mathrm{E}(X)} a\ell \, \mathrm{E}(X) \\ &= a\ell, \end{aligned}$$

il faut donc que l'on ait :

$$b \leq \overline{b} = a\ell.$$

Pour la dominance stochastique d'ordre deux, il suffit d'examiner comment l'espérance et la variance de la richesse varient avec le taux de couverture :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W(a)) &= \mathrm{E}(w + \ell(1-X) + a\ell X - (1+\lambda) a\ell \, \mathrm{E}(X)) \\ &= w + \ell + \mathrm{E}(X)(-\ell + a\ell - (1+\lambda) a\ell) \\ &= w + \ell - \mathrm{E}(X)(\ell + \lambda a\ell) \\ &= w + \ell - \ell \, \mathrm{E}(X)(1 + a\lambda) \end{aligned}$$

L'espérance de la richesse décroît avec le taux de couverture, parce que le taux de chargement est positif :

$$\frac{\partial \, \mathrm{E}(W(a))}{\partial a} = -\ell\lambda \, \mathrm{E}(X) < 0, \ \forall a$$

on peut donc écrire :

$$a_1 > a_2 \Leftrightarrow \mathrm{E}(W(a_1)) < \mathrm{E}(W(a_2)).$$

Examinons maintenant la variance :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(W(a)) &= \mathrm{V}(w + \ell(1-X) + a\ell X - (1+\lambda) a\ell \, \mathrm{E}(X)) \\ &= \mathrm{V}(-\ell X + a\ell X) \\ &= \mathrm{V}(X\ell(a-1)) \\ &= \ell^2 (a-1)^2 \, \mathrm{V}(X) > 0 \end{aligned}$$

la variance décroît avec le taux de couverture :

$$\frac{\partial \, \mathrm{V}(W(a))}{\partial a} = 2\ell^2 (a-1) \, \mathrm{V}(X) < 0 \text{ car } a < 1,$$

la variance de la richesse décroît avec le taux de couverture. Ceci implique :

$$a_1 > a_2 \Leftrightarrow \mathrm{V}(W(a_1)) < \mathrm{V}(W(a_2))$$

Donc, dans tous les cas, l'espérance varie dans le même sens que la variance. Ceci empêche toute dominance stochastique d'ordre 2, puisque :

$$W(a_1) \underset{\mathrm{S}_2}{\succ} W(a_2) \text{ et } \mathrm{E}(W(a_1)) = \mathrm{E}(W(a_2)) \Rightarrow \mathrm{V}(W(a_1)) < \mathrm{V}(W(a_2))$$

or ici :

$$\mathrm{V}(W(a_1)) > \mathrm{V}(W(a_2)) \Rightarrow a_1 < a_2 \Rightarrow \mathrm{E}(W(a_1)) > \mathrm{E}(W(a_2)).$$

Dans tous les cas, il faudra donc étudier les conditions d'optimalité, qui se dérivent de la maximisation de l'espérance d'utilité.

6.1.2 Conditions d'optimalité pour un contrat de co-assurance

Nous nous limiterons au cas riscophobe, car c'est le seul qui ait un sens en matière d'assurance. En effet, si l'agent est neutre face au risque, il ne s'assurera que si :

$$\mathrm{E}(W(a)) > \mathrm{E}(W(0)),$$

or nous avons vu que :

$$W(a) < W(0), \ \forall a > 0,$$

ce qui exclut l'assurance. La raison de ce comportement est que la compagnie d'assurance fait payer à l'assurer une valeur supérieure à l'espérance mathématique du sinistre, pour payer ses frais de gestion et limiter son risque de défaut. Si aucun agent neutre ne s'assure, aucun agent riscophile ne s'assurera.

Dans le cas riscophobe, on doit résoudre le problème :

$$\max_a \mathrm{E}(u(W(a))), \ 0 \leq a \leq 1.$$

On obtient un programme similaire au choix de portefeuille, à ceci prêt que l'expression de la richesse est différente. La condition du premier ordre est donnée par :

$$\frac{\partial\, \mathrm{E}(u(W(a^*)))}{\partial a} = \mathrm{E}\left(u'(W(a^*))\frac{\partial W(a^*)}{\partial a}\right) = 0,$$

or nous avons vu que :

$$W(a) = w + \ell(1 - X) + a\ell X - (1+\lambda)a\ell\,\mathrm{E}(X)$$

donc :

$$\frac{\partial W(a)}{\partial a} = \ell X - (1+\lambda)\,\ell\,\mathrm{E}(X)$$

est indépendante de a. Le seul résultat général que l'on peut établir est l'absence de couverture complète. En effet :

$$\frac{\partial \mathrm{E}\left(u\left(W\left(a\right)\right)\right)}{\partial a}=\mathrm{E}\left(u'\left(W\left(a^{*}\right)\right)\left(\ell X-\left(1+\lambda\right)\ell\,\mathrm{E}\left(X\right)\right)\right)$$

donc en $a=1$, on obtient une richesse (certaine) :

$$\begin{aligned}W\left(1\right) &= w+\ell\left(1-X\right)+\ell X-\left(1+\lambda\right)\ell\,\mathrm{E}\left(X\right)\\ &= w+\ell-\left(1+\lambda\right)\ell\,\mathrm{E}\left(X\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \mathrm{E}\left(u\left(W\left(a\right)\right)\right)}{\partial a}\right|_{a=1} &= \mathrm{E}\left(u'\left(W\left(1\right)\right)\left(\ell X-\left(1+\lambda\right)\ell\,\mathrm{E}\left(X\right)\right)\right)\\ &= u'\left(W\left(1\right)\right)\mathrm{E}\left(\ell X-\left(1+\lambda\right)\ell\,\mathrm{E}\left(X\right)\right)\\ &= u'\left(W\left(1\right)\right)\left(\ell-\left(1+\lambda\right)\ell\right)\mathrm{E}\left(X\right)\\ &= -u'\left(W\left(1\right)\right)\lambda\ell\,\mathrm{E}\left(X\right)<0,\end{aligned}$$

donc on n'est pas au maximum et l'on a même intérêt à réduire la valeur de a puisque la dérivée est négative. On voit également que dans le cas standard la condition du second ordre est vérifiée :

$$\frac{\partial^{2}\mathrm{E}\left(u\left(W\left(a\right)\right)\right)}{\partial a^{2}}=\mathrm{E}\left(u''\left(W\left(a^{*}\right)\right)\left(\ell X-\left(1+\lambda\right)\ell\,\mathrm{E}\left(X\right)\right)^{2}\right)<0,$$

pour toute fonction u concave.

6.1.3 Préférences CARA

Commençons par une utilité de type CARA :

$$u\left(x\right)=-\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\alpha x\right),\ u'\left(x\right)=\exp\left(-\alpha x\right),\ u''\left(x\right)=-\alpha\exp\left(-\alpha x\right)$$

on vérifie que le coefficient d'aversion absolue pour le risque est égal à :

$$\alpha=-\frac{u''\left(x\right)}{u'\left(x\right)},\ \forall x.$$

On suppose que l'on a un modèle à risque unique, dans lequel l'aléa détruit la totalité du bien assuré ou n'a pas lieu du tout. On peut poser :

$$X=\left\{\begin{array}{cc}1 & 0\\ p & 1-p\end{array}\right.$$

la richesse aléatoire pour un décideur assuré s'écrit :

$$W\left(a\right)=w+\ell\left(1-X\right)+a\ell X-\left(1+\lambda\right)a\ell\,\mathrm{E}\left(X\right).$$

D'autre part :

$$\mathrm{E}(X) = p \times 1 + (1-p) \times 0 = p,$$

de sorte que la richesse aléatoire s'écrit :

$$W(a) = w + \ell(1-X) + a\ell X - (1+\lambda)a\ell p.$$

Dans le cas où la destruction du bien assuré est complète, $X = 1$, la richesse s'écrit :

$$W_1(a) = w + a\ell - (1+\lambda)a\ell p = a\ell(1-(1+\lambda)p),$$

et dans le cas où le sinistre n'a pas lieu, $X = 0$, on a :

$$W_0(a) = w + \ell - (1+\lambda)a\ell p.$$

L'espérance d'utilité est donc égale à :

$$U(a) = p\ u(W_1) + (1-p)\ \ u(W_0),$$

donc l'utilité marginale est donnée par :

$$U'(a) = p\frac{\partial W_1}{\partial a}u'(W_1) + (1-p)\frac{\partial W_0}{\partial a}u'(W_0)$$

avec :

$$\frac{\partial W_1}{\partial a} = \ell(1-(1+\lambda)p) > 0$$

et

$$\frac{\partial W_0}{\partial a} = -(1+\lambda)\ell p.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} U'(a) &= p\ell(1-(1+\lambda)p)\exp(-\alpha W_1) - (1-p)(1+\lambda)\ell p\exp(-\alpha W_0) \\ &= \ell p\{(1-(1+\lambda)p)\exp(-\alpha W_1) - (1-p)(1+\lambda)\exp(-\alpha W_0)\} \end{aligned}$$

et la condition du second ordre est toujours vérifiée parce que $u''(x) < 0$. La condition du premier ordre donne :

$$U'(\widetilde{a}) = 0,$$

et la solution sera donnée par :

$$a^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \widetilde{a} < 0 \\ \widetilde{a} & \text{si } \widetilde{a} \geq 0 \end{cases}$$

parce que $\widetilde{a} < 1$ comme nous l'avons montré dans le cas général. La solution intérieure est donc définie par (en simplifiant le terme en $p\ell$) :

$$\begin{aligned} (1-(1+\lambda)p)\exp\left(-\alpha\widetilde{W}_1\right) &= (1-p)(1+\lambda)\exp\left(-\alpha\widetilde{W}_0\right) \\ \exp\left(-\alpha\left(\widetilde{W}_1 - \widetilde{W}_0\right)\right) &= \frac{(1-p)(1+\lambda)}{1-(1+\lambda)p} \\ \widetilde{W}_1 - \widetilde{W}_0 &= -\frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{(1-p)(1+\lambda)}{1-(1+\lambda)p}\right] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1 - \widetilde{W}_0 &= w + \widetilde{a}\ell - (1+\lambda)\,\widetilde{a}\ell p - (w + \ell - (1+\lambda)\,\widetilde{a}\ell p) \\ &= (\widetilde{a} - 1)\,\ell < 0,\end{aligned}$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned}(\widetilde{a} - 1)\,\ell &= -\frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{(1-p)(1+\lambda)}{1-(1+\lambda)\,p}\right] \\ &\Leftrightarrow\ \widetilde{a} = 1 - \frac{1}{\alpha\ell}\ln\left[\frac{(1-p)(1+\lambda)}{1-(1+\lambda)\,p}\right]\end{aligned}$$

et l'on remarque que :

$$(1-p)(1+\lambda) = \lambda + 1 - (1+\lambda)\,p,$$

d'où :

$$\widetilde{a} = 1 - \frac{1}{\alpha\ell}\ln\left[1 + \frac{\lambda}{1-(1+\lambda)\,p}\right],$$

on retrouve donc le résultat général que $\widetilde{a} < 1$. D'autre part, il faut que :

$$\widetilde{a} \geq 0,$$

ici on pose une conditions sur les paramètres. L'aversion pour le risque α, la valeur du bien assuré ℓ et la probabilité de sinistre ne sont pas à proprement parler des paramètres de choix. Par contre, λ est le taux de chargement fixé par la compagnie d'assurance, il s'agit d'une variable de choix et il est préférable de poser une condition sur ce paramètre. On a:

$$\begin{aligned}\widetilde{a} &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow\ 1 - \frac{1}{\alpha\ell}\ln\left[1 + \frac{\lambda}{1-(1+\lambda)\,p}\right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow\ \exp(\alpha\ell) \geq 1 + \frac{\lambda}{1-(1+\lambda)\,p} \\ &\Leftrightarrow\ (1-(1+\lambda)\,p)\exp(\alpha\ell) \geq 1 - (1+\lambda)\,p + \lambda \\ &\Leftrightarrow\ (1-p)\exp(\alpha\ell) \geq 1 - p + \lambda\,(1-p) + \lambda p\exp(\alpha\ell) \\ &\Leftrightarrow\ (1-p)(\exp(\alpha\ell) - 1) \geq \lambda\,(1 - p + p\exp(\alpha\ell)) \\ &\Leftrightarrow\ \lambda \leq \frac{(1-p)(\exp(\alpha\ell)-1)}{(1-p+p\exp(\alpha\ell))}.\end{aligned}$$

Il faut donc que l'assurance ne soit pas trop chère pour qu'il existe une demande. Si cette condition est remplie, nous aurons :

$$a^* = 1 - \frac{1}{\alpha\ell}\ln\left[1 + \frac{\lambda}{1-(1+\lambda)\,p}\right]. \tag{6.1}$$

Il nous reste à étudier les déterminants de cette demande. On peut voir les sens de variation directement avec la forme simple ci-dessus. Nous prendrons une approche plus formelle en calculant les dérivées.

- Effet de l'aversion pour le risque α :

$$\frac{\partial a^*}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha^2 \ell} \ln \left[1 + \frac{\lambda}{1 - (1+\lambda) p} \right] > 0,$$

plus on est riscophobe, plus on choisit un taux de couverture élevé. Ceci signifie également que plus on est riscophobe, plus on est prêt à payer une prime d'assurance élevée.

- Effet de la valeur du bien risqué ℓ :

$$\frac{\partial a^*}{\partial \ell} = \frac{1}{\alpha \ell^2} \ln \left[1 + \frac{\lambda}{1 - (1+\lambda) p} \right] > 0,$$

plus le bien risqué est cher, plus on choisit un taux de couverture élevé, afin de réduire les effets de sa perte sur l'utilité de la richesse.

- Effet du taux de chargement λ :

$$\frac{\partial a^*}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\alpha \ell (1+\lambda)(1 - (1+\lambda) p)} < 0,$$

plus la compagnie d'assurance prend une marge importante, plus la demande d'assurance est faible. On peut y voir une partie de l'effet prix traditionnel.

- Effet de la probabilité de sinistre p :

$$\frac{\partial a^*}{\partial p} = -\frac{\lambda}{\alpha \ell (1-p)(1 - (1+\lambda) p)} < 0,$$

un sinistre fortement probable réduit la demande d'assurance. Ce résultat peut paraître surprenant à première vue, il l'est moins si l'on remarque que la prime d'assurance est croissante avec la probabilité de sinistre. En effet, cette dérivée n'est négative que parce qu'il existe un taux de chargement $\lambda > 0$.

6.1.4 Préférences de Markowitz

Considérons maintenant un critère espérance-variance à la Markowitz :

$$U(a) = \mathrm{E}(W(a)) - \frac{\alpha}{2} \mathrm{V}(W(a)), \ \alpha > 0,$$

et l'on suppose que le taux de destruction suit une loi normale d'espérance $\mu_X > 0$ et de variance σ_X^2. La richesse est donnée par:

$$\begin{aligned} W(a) &= w + \ell (1 - X) + a\ell X - (1+\lambda) a\ell \,\mathrm{E}(X). \\ &= \underbrace{w + \ell - (1+\lambda) a\ell\mu_X}_{\text{certain}} + \underbrace{(a-1)\ell X}_{\text{aléatoire}} \end{aligned}$$

on a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W(a)) &= w+\ell-(1+\lambda)\,a\ell\mu_X+(a-1)\,\ell\mu_X \\ &= w+\ell-(1+a\lambda)\,\ell\mu_X\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{V}(W(a))=(a-1)^2\,\ell^2\sigma_X^2,$$

d'où l'utilité à la Markowitz :

$$U(a)=w+\ell-(1+a\lambda)\,\ell\mu_X-\frac{\alpha}{2}(a-1)^2\,\ell^2\sigma_X^2.$$

ses dérivées sont égales à :

$$U'(a)=-\lambda\ell\mu_X+\alpha(1-a)\,\ell^2\sigma_X^2$$

et

$$U''(a)=-\alpha\ell^2\sigma_X^2<0.$$

On en déduit la condition du premier ordre :

$$\begin{aligned}U'(\widetilde{a}) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha(1-\widetilde{a})\,\ell^2\sigma_X^2=\lambda\ell\mu_X \\ &\Leftrightarrow \widetilde{a}=1-\frac{\lambda\mu_X}{\alpha\ell\sigma_X^2},\end{aligned}$$

et l'on a bien $\widetilde{a}<1$. On doit également poser la condition :

$$\begin{aligned}\widetilde{a} &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda\leq\frac{\alpha\ell\sigma_X^2}{\mu_X},\end{aligned}$$

le taux de chargement ne doit pas être trop élevé pour qu'il existe une demande. Pour une solution intérieure, on aura :

$$a^*=1-\frac{\lambda\mu_X}{\alpha\ell\sigma_X^2}$$

- Effet de l'aversion pour le risque α :

  $$\frac{\partial a^*}{\partial\alpha}=\frac{\lambda\mu_X}{\alpha^2\ell\sigma_X^2}>0,$$

  la demande d'assurance est croissante avec l'aversion pour le risque.

- Effet du taux de chargement λ :

  $$\frac{\partial a^*}{\partial\lambda}=-\frac{\mu_X}{\alpha\ell\sigma_X^2}<0,$$

  la demande d'assurance est décroissante avec le taux de chargement.

- Effet des moments du taux de sinistre :

$$\frac{\partial a^*}{\partial \mu_X} = -\frac{\lambda}{\alpha \ell \sigma_X^2} < 0 \text{ et } \frac{\partial a^*}{\partial \sigma_X^2} = \frac{\lambda \mu_X}{\alpha \ell \sigma_X^4} > 0,$$

  la demande d'assurance décroît avec le taux de sinistre et s'accroît avec sa variance. Le premier effet s'explique par le fait que la prime que doit payer l'assuré s'accroît avec μ_X et par le fait qu'il existe un taux de chargement $\lambda > 0$, le second effet vient du fait qu'une variance plus élevée mesure bien l'incertitude dans un modèle à la Markowitz.

Bien que l'utilité à la Markowitz ne soit CARA que lorsque X suit une loi normale, on peut toutefois considérer que ce modèle fournit une approximation de la solution exacte du modèle à risque unique. En effet, dans cas, on a :

$$\mu_X = p \text{ et } \sigma_X^2 = p\,(1-p)\,,$$

de sorte que l'on aurait :

$$a^* = 1 - \frac{\lambda \mu_X}{\alpha \ell \sigma_X^2} = 1 - \frac{\lambda}{\alpha \ell\,(1-p)}$$

D'autre part, dans le modèle avec risque unique, où X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, nous avions trouvé (6.1) :

$$a^* = 1 - \frac{1}{\alpha \ell} \ln \left[1 + \frac{\lambda}{1-(1+\lambda)\,p}\right] \triangleq f\,(\lambda)$$

Effectuons un développement limité de cette expression au voisinage de $\lambda = 0$. On a :

$$f\,(0) = 1$$

$$\begin{aligned} f'\,(\lambda) \quad &= \quad -\frac{1}{\alpha \ell}\left(\frac{1-\lambda p}{(1+\lambda)\,(1-(1+\lambda)\,p)}\right) \\ &\Rightarrow \quad f'\,(0) = -\frac{1}{\alpha \ell\,(1-p)} \end{aligned}$$

donc :

$$f\,(\lambda) \simeq f\,(0) + f'\,(0)\,\lambda = 1 - \frac{\lambda}{\alpha \ell\,(1-p)},$$

c'est-à-dire la valeur donné par le modèle espérance-variance de Markowitz. On peut donc considérer que le critère espérance-variance appliqué au modèle à risque unique donne une approximation de la solution des modèles CARA au voisinage de $\lambda = 0$.

6.1.5 Préférences CRRA

Les modèles CRRA donnent des calculs plus compliqués, mais la solution explicite peut être obtenue. Considérons donc une fonction d'utilité CRRA :

$$u(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha},\ u'(x) = x^{\alpha-1},\ u''(x) = (\alpha-1)\,x^{\alpha-2}$$

donc l'aversion relative pour le risque s'écrit :

$$-x\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{(\alpha-1)\,x^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} = 1-\alpha > 0,\ \forall\alpha < 1.$$

On considère également le modèle à risque unique avec :

$$X = \begin{cases} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire l'espérance d'utilité :

$$U(a) = pU(W_1) + (1-p)\,U(W_0)$$

et sa dérivée :

$$U'(a) = p\frac{\partial W_1}{\partial a}u'(W_1) + (1-p)\frac{\partial W_0}{\partial a}u'(W_0)$$

avec :

$$\frac{\partial W_1}{\partial a} = \ell\,(1-(1+\lambda)\,p) \text{ et } \frac{\partial W_0}{\partial a} = -(1+\lambda)\,\ell p$$

on aura donc :

$$U'(a) = p\ell\,(1-(1+\lambda)\,p)\,\widetilde{W}_1^{\alpha-1} - (1-p)\,(1+\lambda)\,\ell p\widetilde{W}_0^{\alpha-1},$$

la condition du premier ordre est donnée par :

$$\begin{aligned} U'(\widetilde{a}) &= 0 \\ &\Leftrightarrow (1-(1+\lambda)\,p)\,\widetilde{W}_1^{\alpha-1} = (1-p)\,(1+\lambda)\,\widetilde{W}_0^{\alpha-1} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\widetilde{W}_1}{\widetilde{W}_0}\right)^{\alpha-1} = \frac{(1-p)\,(1+\lambda)}{1-(1+\lambda)\,p} \\ &\Leftrightarrow \frac{\widetilde{W}_1}{\widetilde{W}_0} = \left(\frac{(1-p)\,(1+\lambda)}{1-(1+\lambda)\,p}\right)^{1/(\alpha-1)} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\widetilde{W}_1}{\widetilde{W}_0} = \frac{w+\widetilde{a}\ell\,(1-(1+\lambda)\,p)}{w+\ell-(1+\lambda)\,\widetilde{a}\ell p}$$

d'où la condition :

$$\frac{w+\widetilde{a}\ell\,(1-(1+\lambda)\,p)}{w+\ell-(1+\lambda)\,\widetilde{a}\ell p} = \left(\frac{(1-p)\,(1+\lambda)}{1-(1+\lambda)\,p}\right)^{1/(\alpha-1)}$$

$$\frac{w+\widetilde{a}\ell\left(1-(1+\lambda)\,p\right)}{w+\ell-(1+\lambda)\,\widetilde{a}\ell p}=\left(\frac{1-(1+\lambda)\,p}{(1-p)\,(1+\lambda)}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

$$\begin{aligned}&\left(w+\widetilde{a}\ell\left(1-(1+\lambda)\,p\right)\right)\left((1-p)\,(1+\lambda)\right)^{1/(1-\alpha)}=\\&\qquad\qquad\left(w+\ell-(1+\lambda)\,\widetilde{a}\ell p\right)\left(1-(1+\lambda)\,p\right)^{1/(1-\alpha)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{a}\ell\left[\left(1-(1+\lambda)\,p\right)\left((1-p)\,(1+\lambda)\right)^{1/(1-\alpha)}+(1+\lambda)\,p\left(1-(1+\lambda)\,p\right)^{1/(1-\alpha)}\right]\\&\qquad=(w+\ell)\left(1-(1+\lambda)\,p\right)^{1/(1-\alpha)}-w\left((1-p)\,(1+\lambda)\right)^{1/(1-\alpha)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{a}\ell\left(1-(1+\lambda)\,p\right)(1+\lambda)\left[(1-p)^{1/(1-\alpha)}\,(1+\lambda)^{\alpha/(1-\alpha)}+p\left(1-(1+\lambda)\,p\right)^{\alpha/(1-\alpha)}\right]\\&\qquad=(w+\ell)\left(1-(1+\lambda)\,p\right)^{1/(1-\alpha)}-w\left((1-p)\,(1+\lambda)\right)^{1/(1-\alpha)}\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\widetilde{a}=&\left(\frac{w}{\ell}+1\right)\\&\frac{\left(1-(1+\lambda)\,p\right)^{\alpha/(1-\alpha)}}{\left(1-(1+\lambda)\,p\right)(1+\lambda)\left[(1-p)^{1/(1-\alpha)}\,(1+\lambda)^{\alpha/(1-\alpha)}+p\left(1-(1+\lambda)\,p\right)^{\alpha/(1-\alpha)}\right]}\\&-\left(\frac{w}{\ell}\right)\frac{\left((1-p)\,(1+\lambda)\right)^{1/(1-\alpha)}}{\left(1-(1+\lambda)\,p\right)(1+\lambda)\left[(1-p)^{1/(1-\alpha)}\,(1+\lambda)^{\alpha/(1-\alpha)}+p\left(1-(1+\lambda)\,p\right)^{\alpha/(1-\alpha)}\right]}\end{aligned}$$

ce que l'on peut simplifier légèrement en :

$$\begin{aligned}\widetilde{a}=&\left(\frac{w}{\ell}+1\right)\frac{\left(1-(1+\lambda)\,p\right)^{\alpha/(1-\alpha)}}{(1+\lambda)\left[(1-p)^{1/(1-\alpha)}\,(1+\lambda)^{\alpha/(1-\alpha)}+p\left(1-(1+\lambda)\,p\right)^{\alpha/(1-\alpha)}\right]}\\&-\left(\frac{w}{\ell}\right)\frac{(1-p)^{1/(1-\alpha)}\,(1+\lambda)^{\alpha/(1-\alpha)}}{\left(1-(1+\lambda)\,p\right)\left[(1-p)^{1/(1-\alpha)}\,(1+\lambda)^{\alpha/(1-\alpha)}+p\left(1-(1+\lambda)\,p\right)^{\alpha/(1-\alpha)}\right]}\end{aligned}$$

On peut mesurer la difficulté à déterminer les variations dans le cas général. Nous nous contenterons donc d'étudier le cas de la fonction logarithme, obtenu en posant $\alpha=0$ dans la relation précédente :

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_0&=\left(\frac{w}{\ell}+1\right)\frac{1}{1+\lambda}-\left(\frac{w}{\ell}\right)\frac{1-p}{1-(1+\lambda)\,p}\\&=\frac{1}{1+\lambda}\left(1-\left(\frac{w}{\ell}\right)\frac{\lambda}{1-(1+\lambda)\,p}\right),\end{aligned}$$

où l'on vérifie que $\widetilde{a}_0 < 1/(1+\lambda) \leq 1$. Il n'y a jamais d'assurance complète. Pour qu'il existe une demande d'assurance, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_0 &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1-p}{p+w/\ell}. \end{aligned}$$

Si cette condition est remplie, on obtient la solution intérieure :

$$a_0^* = \frac{1}{1+\lambda}\left(1-\left(\frac{w}{\ell}\right)\frac{\lambda}{1-(1+\lambda)p}\right)$$

On obtient les variation suivantes :

- La demande d'assurance est croissante avec la valeur du bien risqué ℓ :

$$\frac{\partial a_0^*}{\partial \ell} = \frac{w\lambda}{(1+\lambda)\,\ell^2\,(1-(1+\lambda)\,p)} > 0,$$

  on retrouve un résultat précédent,

- La demande d'assurance décroît avec la richesse non risquée w :

$$\frac{\partial a_0^*}{\partial w} = -\frac{\lambda}{(1+\lambda)\,\ell\,(1-(1+\lambda)\,p)} < 0,$$

  ce résultat est nouveau, on ne le trouvait pas avec les fonctions CARA. Ainsi, plus un décideur est riche (au sens certain) plus il tendra à être son propre assureur.

- Plus généralement, la demande d'assurance décroît avec l'importance de la richesse non risquée par rapport à la richesse risquée :

$$\frac{\partial a_0^*}{\partial\left(\frac{w}{\ell}\right)} = -\frac{\lambda}{(1+\lambda)\,(1-(1+\lambda)\,p)} < 0,$$

  c'est donc l'importance du risque dans la richesse qui détermine la demande d'assurance. Plus la proportion de richesse risquée est importante, plus la demande d'assurance est élevée.

- La demande d'assurance est décroissante avec le taux de chargement λ. On peut voir ce résultat sans faire de calcul. Considérons le ratio $\lambda/(1-(1+\lambda)\,p)$, le numérateur est croissant avec λ et le dénominateur est décroissant avec λ, donc le ratio est croissant avec λ. On en déduit que la quantité :

$$1-\left(\frac{w}{\ell}\right)\frac{\lambda}{1-(1+\lambda)\,p}$$

  est décroissante avec λ. D'autre part $1/(1+\lambda)$ est décroissant avec λ, ce qui implique que a_0^* est décroissant avec λ.

- On retrouve également le résultat de décroissance de la demande d'assurance avec la probabilité de sinistre :

$$\frac{\partial a_0^*}{\partial p} = -\left(\frac{w}{\ell}\right) \frac{\lambda}{\left(1-(1+\lambda)\,p\right)^2} < 0$$

la demande d'assurance décroît avec la probabilité de sinistre, ce qui traduit le renchérissement de la prime d'assurance quand la probabilité de sinistre augmente. On remarque également que cette dérivée n'est négative que parce qu'il existe un taux de chargement $\lambda > 0$.

Globalement les fonctions CRRA permettent de réintégrer la richesse non risquée dans l'analyse. Dans le cas de la fonction logarithmique, on trouve le résultat selon lequel les décideurs plus fortunés en actifs certains s'assurent eux-mêmes pour une plus grande part de leur richesse.

6.2 L'assurance avec franchise

Dans ce type de problème, l'assuré doit choisir la franchise optimale δ^*. Le montant remboursé est égal à :

$$I = \max\left(0, \ell X - \delta\right),$$

et la prime est égale à $b = (1+\lambda)\,\mathrm{E}\,(I)$. La première difficulté consiste à calculer l'espérance de la prime $\mathrm{E}\,(I)$. On a :

$$I\,(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < \delta/\ell \\ \ell X - \delta & \text{si } X \geq \delta/\ell \end{cases}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,(I\,(X)) &= \int_0^1 I\,(x)\, f_X\,(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\delta/\ell} I\,(x)\, f_X\,(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta/\ell}^1 I\,(x)\, f_X\,(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\delta/\ell} 0 \times f_X\,(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta/\ell}^1 (\ell x - \delta)\, f_X\,(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 \times \underbrace{\int_0^{\delta/\ell} f_X\,(x)\,\mathrm{d}x}_{\Pr[X<\delta/\ell]} + \int_{\delta/\ell}^1 (\ell x - \delta)\, f_X\,(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

on en déduit :

$$\mathrm{E}\,(I\,(X)) = \int_{\delta/\ell}^1 (\ell x - \delta)\, f_X\,(x)\,\mathrm{d}x,$$

en intégrant par parties :

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & \ell x - \delta \Rightarrow u'(x) = \ell \\ v'(x) & = & f_X(x) \Rightarrow v(x) = F_X(x), \end{array}$$

on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{E}(I(X)) & = & [(\ell x - \delta) F_X(x)]_{\delta/\ell}^{1} - \int_{\delta/\ell}^{1} \ell F_X(x)\,\mathrm{d}x \\ & = & (\ell - \delta) F_X(1) - (\delta - \delta) F_X(\delta/\ell) - \ell \int_{\delta/\ell}^{1} F_X(x)\,\mathrm{d}x \\ & = & \ell - \delta - \ell \int_{\delta/\ell}^{1} F_X(x)\,\mathrm{d}x, \end{array}$$

et la prime d'assurance sera égale à :

$$b = (1+\lambda)\left\{\ell - \delta - \ell \int_{\delta/\ell}^{1} F_X(x)\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Comment la prime varie t-elle avec le montant de la franchise? Pour répondre à cette question, on utilise la formule de Leibniz :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = b'(x) f(b(x)) - a'(x) f(a(x)),$$

donc :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}d} & = & (1+\lambda)\left(-1 - \ell\left(0 - \dfrac{1}{\ell} F_X(\delta/\ell)\right)\right) \\ & = & (1+\lambda)(F_X(\delta/\ell) - 1) \leq 0, \end{array}$$

plus la franchise est élevée, plus la prime est faible, ce qui est conforme à l'intuition. L'expression de la richesse aléatoire est maintenant égale à :

$$W = w + \ell(1-X) + \max(0, \ell X - \delta) - (1+\lambda)\left\{\ell - \delta - \ell \int_{\delta/\ell}^{1} F_X(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

ce qui peut se réécrire :

$$\begin{array}{rcl} W & = & \left\{\begin{array}{ll} w + \ell(1-X) - b & \text{si } X < \delta/\ell \\ w + \ell - (\delta + b) & \text{si } X \geq \delta/\ell \end{array}\right. \\ & = & w + \ell - b + \left\{\begin{array}{ll} -\ell X & \text{si } X < \delta/\ell \\ -\delta & \text{si } X \geq \delta/\ell \end{array}\right. \end{array}$$

on en déduit que :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(W) &= w+\ell-b-\left\{\int_0^{\delta/\ell} \ell x f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta/\ell}^1 d f_X(x)\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= w+\ell-b-\left\{\int_0^{1} \ell x f_X(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\delta/\ell}^1 \ell x f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta/\ell}^1 \delta f_X(x)\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= w+\ell-b-\left\{\mathrm{E}(\ell X) - \int_{\delta/\ell}^1 \ell x f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta/\ell}^1 \delta f_X(x)\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= w+\ell(1-\mathrm{E}(X))-b+\int_{\delta/\ell}^1 (\ell x-\delta) f_X(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

6.2.1 Modèle à risque unique

Pour aller plus loin, il faut faire une hypothèse sur la distribution de X. Nous allons considérer le modèle à risque unique. Le taux de sinistre X ne peut prendre que deux valeurs 0 et 1. On a :

$$X = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{array} \right.$$

A ce stade, il faut se souvenir que la valeur de la franchise δ ne peut pas dépasser la valeur du bien assuré ℓ, sinon le bien ne serait pas assuré :

$$0 < \frac{\delta}{\ell} < 1,$$

on en déduit que si $X = 0$, on est dans le cas $X < \delta/\ell$ et que si $X = 1$, on est dans le cas $X \geq \delta/\ell$.

La richesse ne peut prendre que deux valeurs

$$W_0 = w + \ell - b$$

avec probabilité $1 - p$, et

$$W_1 = w + \ell - (\delta + b)$$

avec probabilité p. L'espérance de la richesse est donc égale à :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(W) &= (1-p) W_0 + p W_1 \\
&= (1-p)(w+\ell-b) + p(w+\ell-(\delta+b)) \\
&= w+\ell-b-\delta\times p
\end{aligned}
$$

Notons que nous aurions pu utiliser la formule précédente en remarquant que, dans le cas d'un modèle à risque unique :

$$\int_{\delta/\ell}^1 (\ell x-\delta) f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\delta/\ell}^1 (\ell x-\delta)\,\mathrm{d}F(x) = (\ell\times 1-\delta)\,p,$$

car X ne peut prendre que la valeur 1 sur l'intervalle $[\delta/\ell, 1]$. On calcule l'espérance d'utilité de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right) &= \left(1-p\right)u\left(W_0\right)+pu\left(W_1\right) \\ &= \left(1-p\right)u\left(w+\ell-b\right)+pu\left(w+\ell-\left(\delta+b\right)\right) \end{aligned}$$

avec :

$$b=\left(1+\lambda\right)\left\{\ell-\delta-\ell\int_{\delta/\ell}^{1}F_X\left(x\right)\mathrm{d}x\right\}$$

or :

$$F_X\left(x\right)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-p & \text{si } 0\leq x<1 \\ 1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

on voit donc graphiquement que :

$$\int_{\delta/\ell}^{1}F_X\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(1-p\right)\left(1-\delta/\ell\right),$$

ce qui implique :

$$b=\left(1+\lambda\right)\left(\ell-\delta\right)p,$$

on vérifie que :

$$\frac{\partial b}{\partial \delta}=-\left(1+\lambda\right)p<0.$$

Il nous reste à rechercher la valeur de la franchise en résolvant :

$$\delta^*=\arg\max_{\delta}\mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right).$$

6.2.2 Préférences CARA

Pour simplifier l'analyse, prenons une fonction CARA :

$$u\left(x\right)=-\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\alpha x\right)$$

qui implique :

$$\mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right)=-\frac{p}{\alpha}\exp\left(-\alpha W_1\right)-\frac{1-p}{\alpha}\exp\left(-\alpha W_0\right)$$

d'où la condition du premier ordre :

$$p\frac{\partial W_1}{\partial \delta}\left(\delta^*\right)\exp\left(-\alpha W_1\left(\delta^*\right)\right)+\left(1-p\right)\frac{\partial W_0}{\partial \delta}\left(\delta^*\right)\exp\left(-\alpha W_0\left(\delta^*\right)\right)=0$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial \delta} &= -1-\frac{\partial b}{\partial \delta}=-1+\left(1+\lambda\right)p \\ \frac{\partial W_0}{\partial \delta} &= -\frac{\partial b}{\partial \delta}=\left(1+\lambda\right)p \end{aligned}$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned}(1-p)(1+\lambda)p\exp(-\alpha W_0(\delta^*)) &= p(1-(1+\lambda)p)\exp(-\alpha W_1(\delta^*))\\ \frac{(1-p)(1+\lambda)}{1-(1+\lambda)p} &= \exp(\alpha(W_0(\delta^*)-W_1(\delta^*)))\\ \delta^* &= \frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{(1-p)(1+\lambda)}{1-(1+\lambda)p}\right]>0,\end{aligned}$$

l'assuré ne choisit jamais l'assurance complète, qui correspondrait au cas $\delta=0$. La rélation précédente peut se réécrire :

$$\delta^*=\frac{1}{\alpha}\ln\left[1+\frac{\lambda}{1-(1+\lambda)p}\right],$$

les variations sont les suivantes :

- la franchise décroît avec l'aversion pour le risque : plus un décideur est averse au risque, plus il choisit une franchise faible afin d'améliorer sa protection contre le risque;
- plus le taux de chargment est élevé, plus la franchise est élevé. Augmenter la franchise est un moyen de réduire le coût de l'assurance, plus l'assurance est chère, plus le décideur augmentera la franchise;
- plus le risque est probable plus la franchise est élevée; c'est également un moyen de réduire le coût de l'assurance;
- on voit que si le taux de chargement était nul, on se retrouverait dans le cas limite d'une assurance complète.

6.2.3 Préférences CRRA

Considérons maintenant le cas CRRA avec une fonction d'utilité :

$$u(x)=\frac{x^\alpha}{\alpha},$$

l'espérance d'utilité est donnée par :

$$U(\delta)=\mathrm{E}(u(W))=\frac{p}{\alpha}W_1^\alpha+\frac{1-p}{\alpha}W_0^\alpha,$$

et l'utilité marginale (associée à la hausse d'un Euro de franchise) est donnée par :

$$U'(\delta)=p\frac{\partial W_1}{\partial\delta}(W_1)^{\alpha-1}+(1-p)\frac{\partial W_0}{\partial\delta}(W_0)^{\alpha-1},$$

et nous avons vu :

$$\frac{\partial W_1}{\partial\delta}=-1+(1+\lambda)p,\ \frac{\partial W_0}{\partial\delta}=(1+\lambda)p,$$

donc :
$$U'(\delta) = (1-p)(1+\lambda)\,p\,(W_0)^{\alpha-1} - p\,(1-(1+\lambda)\,p)\,(W_1)^{\alpha-1}$$
et la condition du premier ordre s'écrit :
$$\begin{aligned}
(1-p)(1+\lambda)(W_0^*)^{\alpha-1} &= (1-(1+\lambda)\,p)(W_1^*)^{\alpha-1} \\
\frac{(1-p)(1+\lambda)}{1-(1+\lambda)\,p} &= \left(\frac{W_1^*}{W_0^*}\right)^{\alpha-1} \\
\frac{1-(1+\lambda)\,p}{(1-p)(1+\lambda)} &= \left(\frac{W_1^*}{W_0^*}\right)^{1-\alpha} \\
\left[\frac{1-(1+\lambda)\,p}{(1-p)(1+\lambda)}\right]^{1/(1-\alpha)} &= \frac{W_1^*}{W_0^*} \\
\left[\frac{1-(1+\lambda)\,p}{(1-p)(1+\lambda)}\right]^{1/(1-\alpha)} &= 1-\frac{\delta^*}{w+\ell-b^*} \\
\frac{\delta^*}{w+\ell-b^*} &= 1-\left[\frac{1-(1+\lambda)\,p}{(1-p)(1+\lambda)}\right]^{1/(1-\alpha)} \triangleq k
\end{aligned}$$
et l'on doit résoudre :
$$\begin{aligned}
\delta^* &= k\,(w+\ell-b^*) \\
\delta^* &= k\,(w+\ell-(1+\lambda)\,p\ell+(1+\lambda)\,p\delta^*) \\
\delta^*(1-k\,(1+\lambda)\,p) &= k\,(w+(1-(1+\lambda)\,p)\,\ell)
\end{aligned}$$
finalement :
$$\delta^* = \frac{k\,(w+(1-(1+\lambda)\,p)\,\ell)}{1-k\,(1+\lambda)\,p} = \frac{w+(1-(1+\lambda)\,p)\,\ell}{1/k-(1+\lambda)\,p}$$
avec :
$$k = 1-\left[\frac{1-(1+\lambda)\,p}{(1-p)(1+\lambda)}\right]^{1/(1-\alpha)}.$$

Cette forme complexe se simplifie bien dans le cas logarithmique, obtenu pour $\alpha = 0$. On obtient :
$$k_0 = 1-\frac{1-(1+\lambda)\,p}{(1-p)(1+\lambda)} = \frac{\lambda}{(1-p)(1+\lambda)},$$
d'où :
$$1/k-(1+\lambda)\,p = \frac{1+\lambda}{\lambda}(1-(1+\lambda)\,p)$$
donc :
$$\delta_0^* = \frac{\lambda w}{(1+\lambda)(1-(1+\lambda)\,p)} + \frac{\lambda\ell}{1+\lambda}$$

ce que l'on peut réécrire :
$$\frac{\delta^*}{\ell} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\left[1+\frac{1}{1-(1+\lambda)\,p}\left(\frac{w}{\ell}\right)\right]$$
les variations sont les suivantes :

- la franchise augmente avec la part de la richesse non risquée w/ℓ : plus le décideur est riche, plus il s'assure lui-même;
- plus le bien à assurer est cher (plus ℓ est élevé), plus l'importance de la franchise est faible par rapport à la valeur du bien assuré. On assure donc relativement plus les biens les plus chers;
- la franchise augmente avec le taux de chargement et la probabilité de sinistre.

6.2.4 Le critère espérance-variance

Bien que le risque ne puisse pas suivre une loi normale, on peut toujours appliquer le critère espérance-variance à ce problème. Dans ce cas, l'utilité n'est plus forcément CARA. L'espérance de la richesse est égale à :

$$\mathrm{E}(W) = w + \ell - b - \delta p$$

avec :

$$b = (1+\lambda)(\ell - \delta)\, p,$$

et sa variance à :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(W) &= \mathrm{E}(W - \mathrm{E}(W))^2 \\ &= (1-p)(W_0 - \mathrm{E}(W))^2 + p(W_1 - \mathrm{E}(W))^2 \\ &= (1-p)(\delta p)^2 + p((p-1)\delta)^2 \\ &= p(1-p)\delta^2 \end{aligned}$$

d'où le critère du décideur :

$$\begin{aligned} U(\delta) &= w + \ell - b - \delta p - \frac{\alpha}{2} p(1-p)\delta^2 \\ &= w + \ell - (1+\lambda)(\ell - \delta)p - \delta p - \frac{\alpha}{2} p(1-p)\delta^2 \\ &= w - \lambda\ell + \lambda p \delta - \frac{\alpha}{2} p(1-p)\delta^2 \end{aligned}$$

et l'utilité marginale :

$$U'(\delta) = \lambda p - \alpha p(1-p)\delta$$

avec

$$U''(\delta) = -\alpha p(1-p) < 0,$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} U'(\delta^*) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda p = \alpha p(1-p)\delta^* \\ &\Leftrightarrow \delta^* = \frac{\lambda}{\alpha(1-p)}. \end{aligned}$$

La franchise optimale possède les variations suivantes :

- elle est décroissante avec l'aversion pour le risque;
- elle est croissante avec le taux de chargement;
- elle est croissante avec la probabilité de sinistre;
- elle est indépendante de la richesse non risquée et du montant du bien assuré.

Le dernier point est clairement le plus gênant.

6.2.5 Comparaison

Prenons deux contrats d'assurance, un premier avec franchise et un autre avec co-assurance, on assure la même richesse et les agents ont les mêmes préférences. On a également suppposé un modèle à risque unique. Obtient-on des assurances équivalentes?

Commençons par le cas CARA. Nous avons vu que le taux de couverture optimal est égal à :

$$a^* = 1 - \frac{1}{\alpha\ell} \ln \left[1 + \frac{\lambda}{1 - (1+\lambda)\,p}\right]$$

et que la franchise optimale dans le même cas est égale à :

$$\delta^* = \frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \frac{\lambda}{1 - (1+\lambda)\,p}\right],$$

dont le taux de couverture correspondant est égal à :

$$\frac{\ell - \delta^*}{\ell} = 1 - \frac{\delta^*}{\ell} = a^*,$$

ces deux contrats sont rigoureusement équivalents en termes de couverture.

Examinons maintenant le cas logarithmique, le taux de couverture optimal est égal à :

$$a_0^* = \frac{1}{1+\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{1 - (1+\lambda)\,p}\left(\frac{w}{\ell}\right)\right)$$

et la franchise optimale à :

$$\delta_0^* = \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\frac{w}{1 - (1+\lambda)\,p} + \ell\right),$$

dont le taux de couverture est égal à :

$$1 - \frac{\delta_0^*}{\ell} = a_0^*,$$

on trouve le même résultat.

Avec le modèle espérance variance, le taux de couverture optimal est de :

$$a^* = 1 - \frac{\lambda}{\alpha\ell\,(1-p)},$$

et on trouve une franchise de :

$$\delta^* = \frac{\lambda}{\alpha\,(1-p)}$$

donc :

$$1 - \frac{\delta^*}{\ell} = a^*,$$

et on retrouve l'équivalence.

6.3 La sélection adverse

Dans un premier temps, nous allons déterminer la prime d'assurance maximale que des décideurs sont prêts à payer. Dans un second temps, nous considérerons une population composée d'individus dont les risques sont différents.

Supposons qu'un agent dispose d'une richesse certaine initiale (avant sinistre) égale à $m = \omega + \ell$, et que W est sa richesse aléatoire sans assurance, égale à :

$$W = m - \ell X,\ \ X \in [0,1]$$

le montant maximum d'assurance qu'il est prêt à payer $\overline{b}$ est défini par :

$$U\left(m - \overline{b}\right) = \mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right),$$

en effet si $b < \overline{b}$ on a :

$$\begin{aligned} b &< \overline{b} \\ &\Leftrightarrow m - b > m - \overline{b} \\ &\Leftrightarrow U\left(m-b\right) > U\left(m-\overline{b}\right) = \mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right), \end{aligned}$$

et la richesse avec assurance procure une utilité supérieure à l'espérance d'utilité sans assurance, dont le décideur accepte de s'assurer. Inversement, si $b > \overline{b}$:

$$U\left(m-b\right) < \mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right)$$

et le décideur refuse de s'assurer. La prime de risque absolue est définie par :

$$U\left(\mathrm{E}\left(W\right) - \pi_a\right) = \mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right)$$

et :

$$U\left(m - \overline{b}\right) = \mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right)$$

on a donc :

$$\begin{aligned} U\left(\mathrm{E}\left(W\right)-\pi_a\right) &= U\left(m-\overline{b}\right) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{E}\left(W\right)-\pi_a = m-\overline{b} \\ &\Leftrightarrow \overline{b} = \pi_a + m - \mathrm{E}\left(W\right) \end{aligned}$$

or :

$$m-\mathrm{E}\left(W\right)=\mathrm{E}\left(I\right),$$

en effet m est la richesse avec assurance complète et $\mathrm{E}\left(W\right)$ la valeur moyenne de la richesse sans assurance. L'écart entre ces deux quantités est égale à l'espérance de l'indemnité versée par la compagnie d'assurance. On peut donc écrire :

$$\overline{b}=\pi_a+\mathrm{E}\left(I\right),$$

et, d'autre part, la prime maximale peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \overline{b} &= \left(1+\overline{\lambda}\right)\mathrm{E}\left(I\right) \\ &\Leftrightarrow \pi_a+\mathrm{E}\left(I\right)=\left(1+\overline{\lambda}\right)\mathrm{E}\left(I\right) \\ &\Leftrightarrow \pi_a=\overline{\lambda}\,\mathrm{E}\left(I\right) \\ &\Leftrightarrow \overline{\lambda}=\frac{\pi_a}{\mathrm{E}\left(I\right)} \end{aligned}$$

Exemple 6.1 *Considérons un modèle à risque unique :*

$$X=\begin{cases} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{cases}$$

et une fonction d'utilité logarithmique $u\left(x\right)=\ln x$. L'espérance de la richesse aléatoire sans assurance est égale à :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(W\right) &= \mathrm{E}\left(\omega+\ell-\ell X\right) \\ &= p\omega+\left(1-p\right)\left(\omega+\ell\right) \\ &= \omega+\left(1-p\right)\ell \end{aligned}$$

et l'espérance de la prime à :

$$\mathrm{E}\left(I\right)=\omega+\ell-\mathrm{E}\left(W\right)=p\ell.$$

L'espérance d'utilité est égale à :

$$\mathrm{E}\left(u\left(W\right)\right)=p\ln\omega+\left(1-p\right)\ln\left(\omega+\ell\right),$$

la prime de risque est donc définie par :

$$\ln\left(\omega+\left(1-p\right)\ell-\pi_a\right)=p\ln\omega+\left(1-p\right)\ln\left(\omega+\ell\right),$$

en prenant l'exponentielle des deux membres de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned}\omega+(1-p)\,\ell-\pi_a &= \omega^p\,(\omega+\ell)^{1-p}\\ &\Leftrightarrow\ \pi_a=\omega+(1-p)\,\ell-\omega^p\,(\omega+\ell)^{1-p}\\ &\Leftrightarrow\ \pi_a=(\omega+\ell)\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega+\ell}\right)^p\right)-p\ell\end{aligned}$$

donc :

$$\overline{\lambda}=\frac{\pi_a}{\mathrm{E}\,(I)}=\frac{\omega+\ell}{p\ell}\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega+\ell}\right)^p\right)-1,$$

Exemple 6.2 *On peut aussi calculer directement la prime maximale :*

$$\begin{aligned}\ln\left(\omega+\ell-\overline{b}\right) &= p\ln\omega+(1-p)\ln(\omega+\ell)\\ &\Leftrightarrow\ \omega+\ell-\overline{b}=\omega^p\,(\omega+\ell)^{1-p}\\ &\Leftrightarrow\ \overline{b}=(\omega+\ell)\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega+\ell}\right)^p\right),\end{aligned}$$

et l'on peut retrouver ensuite le taux de chargement maximal :

$$\overline{b}=\left(1+\overline{\lambda}\right)\mathrm{E}\,(I)=\left(1+\overline{\lambda}\right)p\ell$$

soit :

$$\begin{aligned}\overline{\lambda} &= \frac{\overline{b}}{p\ell}-1\\ &= \frac{(\omega+\ell)}{p\ell}\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega+\ell}\right)^p\right)-1.\end{aligned}$$

Le problème de sélection adverse (ou anti-sélection) est un problème qui se pose quand la compagnie d'assurance ne peut pas distinguer les bons et les mauvais risques. Supposons que l'on ait une population composée à part égales de deux types d'assurés. Le premier type d'assuré a une probabilité de sinistre égale à p_1, et le second type une probabilité égale à p_2. Sans perte de généralité, on suppose que $p_1<p_2$. La probabilité pour l'ensemble de la population est égale à :

$$\overline{p}=\frac{p_1+p_2}{2},$$

avec, par définition

$$p_1<\overline{p}<p_2.$$

Remarque 6.1 S'il y avait n_1 individidus de type 1 et n_2 individus de type 2, on aurait :

$$\overline{p}=\frac{n_1}{n_1+n_2}p_1+\frac{n_2}{n_1+n_2}p_2$$

et

$$p_1<\overline{p}<p_2.$$

Nous sommes donc en présence d'une asymétrie d'information : la compagnie ne connait pas les probabilité de sinsitre de chaque assuré, mais chaque assuré connaît la sienne. L'assureur, en se basant sur l'information dont il dispose, va donc proposer une prime égale à :

$$b = \left(1 + \overline{\lambda}\right) \mathrm{E}\left(I\right) = \left(1 + \overline{\lambda}\right) \overline{p}\ell,$$

or la prime maximale que seraient prêt à payer les bons risques est égale à :

$$b_1 = \left(1 + \overline{\lambda}\right) p_1 \ell$$

donc :

$$\begin{aligned} b_1 - b &= \left(1 + \overline{\lambda}\right) p_1 \ell - \left(1 + \overline{\lambda}\right) \overline{p}\ell \\ &= \left(1 + \overline{\lambda}\right) \ell \left(p_1 - \overline{p}\right) < 0 \end{aligned}$$

et les agents de type 1 refusent de s'assurer si la prime est celle proposée par l'assureur, car la prime proposée par la compagnie est supérieure à celle qu'ils sont prêts à payer. D'autre part, les mauvais risques sont prêts à payer une prime égale à :

$$b_2 = \left(1 + \overline{\lambda}\right) p_2 \ell$$

de sorte que :

$$b_2 - b = \left(1 + \overline{\lambda}\right) \ell \left(p_2 - \overline{p}\right) > 0,$$

et les mauvais risques s'assurent car la prime proposée par la compagnie est inférieur à la prime qu'ils sont prêts à payer. Le taux de chargement de la compangie d'assurance n'est donc pas adapté et son profit sera plus faible qu'attendu. L'effet sera d'autant plus négatif sur son profit que l'écart des probabilités est important.

Globalement seuls les mauvais risques s'assurent et le profit moyen de l'assureur est égal à :

$$b - \mathrm{E}\left(I\right) = \left(1 + \overline{\lambda}\right) \overline{p}\ell - p_2 \ell$$

où $\overline{\lambda}$ est le taux de chargement calculé sur l'ensemble de la population.

Plusieurs stratégies sont possibles pour faire face à ce problème :

- rendre l'assurance obligatoire, ce qui est équivalent à faire financer les mauvais risques par les bons risques;

- mettre en place un système de bonus-malus pour différencier les primes entre les agents. En collectant de l'information individuelle sur les risques on peut séparer les bons risques des mauvais risques. Ce système ne peut toutefois fonctionner que pour des risques relativement fréquents, il n'est pas adapté aux évènements rares et très couteux;

- collecter des informations sur des caractéristiques associés aux risques, et proposer des primes différentes. Par exemple, les jeunes conducteurs de sexe masculin payaient des primes d'assurance plus élevées que les femmes et les hommes plus âgés. On peut s'interroger sur l'optimalité des décisions récentes en ce domaine.