TD : Microéconomie de l'incertain

Emmanuel Duguet

2016

Sommaire

DOSSIER 1

Les loteries

On considère une personne qui veut placer un capital $V = 1000$. Il choisit de ne faire qu'un type de placement parmi les trois suivants: livret, obligations d'Etat ou actions. Il doit faire face à différents types de conjoncture économique (trois états de la nature) : défavorable, moyenne et favorable. On résume la situation dans la matrice d'information suivante, qui indique le capital de fin de période.

		e_1 défavorable $p = 1/2$	e_2 moyenne $p = 3/10$	e_3 favorable $p = 2/10$
a_1	Livret	1022	1022	1022
a_2	Obligations	1100	1060	1060
a_3	Actions	800	1300	1600

1. Montrer que chaque décision peut se mettre sous forme d'une loterie

2. Quelle sont les espérances mathématiques de ces trois loteries?

3. Quelles sont les variances de ces loteries? Quelle est la hiérarchie des rendements et des risques?

4. On souhaite interpréter ces différentes actions dans le cadre d'une fonction d'utilité à la Markowitz

   (a) $k = -2$

   (b) $k = 0$

   (c) $k = -1$

5. Existe t-il un un degré d'aversion vis à vis du risque qui amène à préférer le placement en actions au placement sur livret? Peut-on dire qu'une personne neutre vis à vis du risque ne prend pas de risque? Même question pour une personne légèrement averse au risque ($k > 0$ très proche de 0)?

6. On considère maintenant une quatrième loterie composée de la manière suivante : 1/2 placé sur livret, et 1/4 sur les deux autres placements. Ecrire cette loterie, notée a_4.

7. Quelle est son espérance? Sa variance?

8. Le placement diversifié peut-elle être préférée aux autres dans les trois cas précédents ($k = -2, 0, 1$)?

   (a) $k = -2$

   (b) $k = 0$

   (c) $k = 1$

   (d) Quel est le degré d'aversion au risque pour lequel on préfère le placement diversifié au livret ?on retrouve un résultat similaire au précédent, il existe bien des individus averses au risque ($k > 0$) qui préfèrent ce placement risqué au placement certain.

9. On considère maintenant que notre investisseur décide de placer une part α de son capital en actions et $1 - \alpha$ sur le livret. Ecrire la loterie correspondante.
   On applique la même méthode que pour le placement diversifié

10. Quel part en actions $\alpha \in [0, 1]$ un investisseur choisira t-il selon que $k = -2$, $k = 0$ ou $k = 1$?

    (a) Pour $k = -2$

    (b) Pour $k = 0$

    (c) Pour $k = 1$

11. Quel degré d'aversion pour le risque faudrait-il pour qu'un investisseur place 1/4 de son capital en actions?

DOSSIER 2

Production en univers incertain

On considère une entreprise dotée d'une fonction de production :

$$y = \sqrt{\ell},$$

où ℓ est l'emploi et y la production. Le bien est vendu au prix p et le salaire horaire est égal à w. Dans un premier temps, on se situe en environnement certain.

1. Rappeler quelles sont les valeurs de la demande de travail, de la production et du profit maximal de l'entreprise. On les notera ℓ_c, y_c et Π_c.

2. On suppose maintenant que le producteur doit faire face à une incertitude sur le prix de vente. Il sait juste que le prix est aléatoire, que sa valeur moyenne est $\overline{p}$ et sa variance σ_p^2.

   (a) Rappeler l'interprétation de la variance.

   (b) On suppose que l'entrepreneur est neutre face au risque. Déterminer la demande de travail, l'offre de biens et le maximum de profit. On les notera ℓ_n, y_n et Π_n. Quelle est la variance du profit dans ce cas?

   (c) Comment la production d'univers incertain se situe t-elle par rapport à celle d'univers certain?

3. On suppose maintenant que l'entrepreneur admet des préférences à la Markowitz :

$$\begin{aligned} U(\Pi) &= \mathrm{E}(\Pi) - k\mathrm{V}(\Pi) \\ &= \mathrm{E}\left(\Pi - k(\Pi - \mathrm{E}(\Pi))^2\right) \end{aligned}$$

on peut donc poser :

$$U(\Pi) = \mathrm{E}(u(\Pi))$$

avec :

$$u(x) = x - k(x - \mathrm{E}(x))^2$$

(a) Rappeler l'interprétation du paramètre k. Quand a t-on un entrepreneur riscophobe? riscophile?

(b) Quelle est la prime de risque associée à ces préférences?

(c) Déterminer la demande de travail, l'offre de biens et le maximum de profit. On les notera ℓ_m, y_m et Π_m. Comment ces trois quantités varient-elles en fonction de la volatilité des prix, de l'aversion pour le risque? Quelle est la prime de risque?

DOSSIER 3

Prime de risque

3.1 Prime de risque et utilité CRRA

1. Rappeler ce que signifie CRRA.

2. On considère la fonction d'utilité suivante :

$$u(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha},\ \alpha \neq 0$$

   Montrer qu'elle est CRRA. Pour quelles valeurs de α les préférences présentent elles de l'aversion face au risque.

3. On considère le placement suivant, en Euros :

$$X = \left\{ \begin{array}{cc} R & p \\ -R & 1-p \end{array} \right.$$

   (a) Quelle est l'espérance de ce placement?

   (b) Quelle est la variance de ce placement ?

4. Calculer la prime de risque absolue, exacte, du placement X pour un agent de richesse $\omega > R$.

5. Primes de risque.

   (a) Quelles valeurs cette prime prend elle pour $\alpha = 1$?

(b) Calculer la prime pour $\alpha = -1$?

(c) Pour $\alpha = -1$, comment la prime varie t-elle avec la richesse ω? le rendement R? lOn voit directement que la prime de risque décroit avec la richesse ω.

(d) Calculer l'approximation de la prime de risque d'Arrow-Pratt dans le cas général. On la notera $\widetilde{\pi}_a$

(e) Quelles valeurs trouve t-on pour cette approximation quand $\alpha = 1$? $\alpha = -1$?

6. On considère le placement suivant, en proportion de la richesse totale

$$Y = \begin{cases} r_1 & p \\ -r_2 & 1-p \end{cases}$$

avec $r_2 < 1$.

(a) Que garantit la contrainte $r_2 < 1$?

(b) Quelle sont l'espérance et la variance de la richesse?

(c) Calculer la prime de risque exacte, relative, du placement Y pour un agent de richesse ω.

(d) Quelles sont les primes de risque pour $\alpha = 1$? $\alpha = -1$?

(e) Calculer l'approximation de la prime de risque d'Arrow-Pratt dans le cas général. On la notera $\widetilde{\pi}_r$.

(f) Quelles valeurs trouve t-on pour cette approximation quand $\alpha = 1$? $\alpha = -1$?

(g) Commenter la différence entre les deux primes π_r et $\widetilde{\pi}_r$.

3.2 Prime de risque et utilité CARA

1. Rappeler ce que signifie CARA.

2. On considère la fonction d'utilité suivante :

$$u(x) = -e^{-\alpha x},\ \alpha > 0$$

Montrer qu'elle est CARA. Pour quelles valeurs de α les préférences présentent elles de l'aversion face au risque, de la neutralité face au risque?

3. On considère le placement suivant, en Euros, identique à celui de l'exercice précédent :

$$X = \begin{cases} R & p \\ -R & 1-p \end{cases}$$

Rappel : on a $\mathrm{E}(X) = (2p-1)R$ et $\mathrm{V}(X) = 4R^2 p(1-p)$.

   (a) Calculer la prime de risque absolue, exacte, du placement X pour un agent de richesse $\omega > R$.

   (b) Calculer l'approximation de la prime de risque d'Arrow-Pratt dans le cas général. On la notera $\widetilde{\pi}_a$.

   (c) Quand cette prime est-elle nulle?

   (d) Quand cette prime est elle maximale, pour une valeur donnée de R?

4. On considère le placement suivant, en proportion de la richesse totale

   (a) Calculer la prime de risque exacte, relative, du placement Y pour un agent de richesse ω.

   (b) Calculer l'approximation de la prime de risque d'Arrow-Pratt dans le cas général. On la notera $\widetilde{\pi}_r$.

   (c) Comment cette prime varie t-elle avec les paramètres du modèle?

DOSSIER 4

Investissement et risque de défaut

4.1 Le cas CRRA

On considère un investisseur disposant d'une richesse certaine ω. Il souhaite investir une partie de cette richesse ω_1 en actif certain, au taux r_1, et la partie restante ω_2 en actif incertain, au taux aléatoire R_2.

1. Ecrire l'expression de la richesse aléatoire W, après le placement, en fonction de la richesse initiale certaine ω, de la part de la richesse investie en actif risqué $\pi = \omega_2/\omega$, du taux de rendement certain $r_1 > 0$ et du taux de rendement aléatoire R_2.

2. L'investisseur possède des préférences représentées par la fonction CRRA suivante :
$$u(x) = \frac{1}{\alpha}x^{\alpha},\ \alpha \neq 0,\ \alpha < 1$$
Ecrire l'espérance d'utilité associée au problème d'investissement.

3. On suppose que le placement aléatoire est donné par la loterie suivante :
$$R_2 = \begin{cases} -1 & r_2 \\ p & 1-p \end{cases}$$
commenter la forme de ce placement.

4. Ecrire le problème de l'investisseur avec le placement de la question précédente, sachant que l'on cherche à déterminer la valeur optimale de π.

5. Montrer que la part de l'actif risqué est toujours nulle quand le rendement de l'actif risqué est inférieur à celui de l'actif certain. Interpréter ce résultat.

6. En supposant que $r_2 > r_1$, Calculer la part optimale π^* que l'investisseur doit placer dans l'actif risqué. Comment varie t-elle avec la richesse?

7. Pour quelles valeurs des rendements moyens la part risquée est-elle positive ?

8. On considère maintenant que $u(x) = \ln x$. On obtient ce cas en posant $\alpha = 0$. Donner la part optimale investie dans l'actif risqué.Quand l'investisseur accepte t-il de risquer une partie de son capital? De risquer tout son capital?

4.2 Le cas CARA

On considère un investisseur disposant de la même richesse que dans l'exercice précédent. Il possède des préférences CARA suivantes :

$$u(x) = -e^{-\alpha x}, \ \ \alpha > 0$$

1. Ecrire l'espérance d'utilité associée au problème d'investissement.

2. Ecrire le problème de l'investisseur , sachant que l'on cherche à déterminer la valeur optimale de π.

3. Montrer que la part de l'actif risqué est toujours nulle quand le rendement de l'actif risqué est inférieur à celui de l'actif certain. Interpréter ce résultat.

4. En supposant que $r_2 > r_1$, Calculer la part optimale π^* que l'investisseur doit placer dans l'actif risqué. Comment varie t-elle avec la richesse?

5. Pour quelles valeurs des rendements moyens la part risquée est-elle positive ?

DOSSIER 5

Les choix de portefeuille

5.1 Le cas riscophile

On considère un décideur riscophile dont on suppose que les préférences peuvent être représentées par une fonction de Markowitz. Pour une richesse aléatoire donnée W, on a :

$$U(W) = \mathrm{E}(W) + k\mathrm{V}(W), \; k > 0$$

1. Que représente le coefficient k?

2. On considère que le décideur peut placer sa richesse certaine ω soit dans un actif certain qui rapporte un taux d'intérêt r, soit dans un actif risqué dont le taux de rendement est aléatoire Y (des actions) . On suppose qu'il place un montant a dans l'actif risqué. Donner l'expression de sa richesse aléatoire W.

3. Quelles sont l'espérance et la variance de la richesse W?

4. On pose que le placement risqué reste dans les bornes $\underline{y} \leq Y \leq \overline{y}$. Montrer que la part investie en actif risqué, a, peut varier dans un intervalle $\underline{a} \leq a \leq \overline{a}$, avec $\underline{a} < 0$ et $\overline{a} > \omega$. Expliquer comment on peut parvenir à ce résultat.

5. Ecrire la fonction d'utilité en fonction du montant d'actif risqué a, sa dérivée première et sa dérivée seconde.

6. Quelle type de solution obtient-on avec ce type de fonction?

7. Un investisseur riscophile a t-il intérêt à tout placer en actions? Commenter les résultats obtenus.

8. Quel résultat obtient-on si l'investisseur est neutre face au risque?

5.2 Choix entre deux actifs incertains

On considère un investisseur qui doit répartir sa richesse entre deux actifs risqués. Le premier actif, de rendement aléatoire R_1, procure un rendement moyen r_1, et possède une variance σ_1^2. Le second actif, de rendement aléatoire R_2, procure un rendement moyen r_2, et possède une variance σ_2^2. La richesse initiale certaine est égale à ω, la richesse après placement est aléatoire et notée W. On suppose que les préférences peuvent être représentées par une utilité à la Markowitz :

$$U(W) = \mathrm{E}(W) - \frac{\alpha}{2}\mathrm{V}(W), \ \alpha > 0$$

1. Rappeler la signification de α.

2. Ecrire l'expression de la richesse quand le décideur place a_1 Euros dans l'actif 1 et $a_2 = \omega - a_1$ Euros dans l'actif 2.

3. Ecrire l'espérance et la variance de la richesse. Dans un premier temps, on fera l'hypothèse que les deux placements ne sont pas corrélés, $\mathrm{Cov}(R_1, R_2) = 0$.

4. En déduire l'utilité de Markowitz sous l'hypothèse d'absence de corrélation des rendements. Quel montants d'actifs risqués (a_1^*, a_2^*) le décideur souhaite t-il investir? On fera l'hypothèse qu'il ne peut pas réaliser d'opérations à découvert.

5. Que se passe t-il quand l'actif 2 est un actif *certain*?

6. Que se passe t-il quand les deux actifs sont risqués et qu'ils ont le même rendement? Peut-on dire que l'investisseur minimise la variance de sa richesse?

7. Dans le cas général, quand l'investisseur a t-il intérêt à investir tout son capital dans l'actif 1?

8. Dans le cas général, quels sont le rendement moyen et la variance de la richesse à l'optimum? Que se passe t-il quand les deux rendements sont égaux? Quand les variances sont égales?

9. On suppose maintenant que les placements ne sont pas de covariance nulle, $\text{Cov}(R_1, R_2) = \sigma_{12} \neq 0$, quelle sont les parts des actifs qui maximisent l'espérance d'utilité? On définit le coefficient de corrélation linéaire des placements 1 et 2 par $\rho_{12} = \sigma_{12}/(\sigma_1\sigma_2)$.

10. Quelles-sont les investissements optimaux quand les rendements moyens sont identiques? Les variances identiques?

11. On suppose que les rendements moyens des deux placements sont égaux $r_1 = r_2 = r$ ainsi que les variances $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Quelle sont l'espérance et la variance de la richesse optimale? Quel est l'impact de la corrélation entre les deux placements sur la volatilité de la richesse? Comment doit-on choisir les deux placements pour que le risque associé à la richesse soit minimal?

12. Dans le cas précédent, comparer la variance de la richesse W^* avec les variances que l'on obtiendrait en plaçant toute la richesse initiale en placement 1 ou 2. A quelle condition un placement mixte procure t-il une variance plus faible?

5.3 Avec préférences CRRA

On considère un décideur, de richesse initiale ω, qui doit effectuer un placement entre un actif certain de taux de rendement r et un actif risqué Y de loterie :

$$Y = \begin{cases} 0 & p \\ 2r & 1-p \end{cases}$$

Le montant investi en actif risqué est noté a et les préférences du décideur sont supposée être représentées par une fonction CRRA :

$$u(x) = -e^{-\alpha x}, \ \alpha > 0,$$

on fait également l'hypothèse que les opérations à découvert ne sont pas autorisées.

1. Ecrire l'expression de la richesse finale, notée W. A quelle loterie correspond elle?

2. Ecrire l'expression de l'espérance d'utilité.

3. Quelle est la part optimale investie dans l'actif risquée, notée a^*? Quand est-elle positive?

4. Quel est l'espérance de l'actif risqué? Quand son espérance mathématique est elle supérieure à r?

5. Commenter les déterminants de la part risquée.

6. Quelle l'espérance de la richesse finale à l'optimum?

7. En examinant la quantité précédente, peut on dire que le rendement augmente avec le risque?

5.4 Avec préférences CARA

On considère un décideur, de richesse initiale ω, qui doit effectuer un placement entre un actif certain de taux de rendement r et un actif risqué Y de loterie :

$$Y = \begin{cases} 0 & p \\ 2r & 1-p \end{cases}$$

Le montant investi en actif risqué est noté a et les préférences du décideur sont supposée être représentées par une fonction CARA :

$$u(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha},\ \alpha < 1,$$

on fait également l'hypothèse que les opérations à découvert ne sont pas autorisées.

1. Ecrire l'expression de la richesse finale, notée W. A quelle loterie correspond elle?

2. Ecrire l'expression de l'espérance d'utilité.

3. Quelle est la part optimale investie dans l'actif risquée, notée a^*? Quand est-elle positive?

4. Quel est l'espérance de l'actif risqué? Quand son espérance mathématique est elle supérieure à r?

5. Commenter les déterminants de la part risquée.

6. Quelle l'espérance de la richesse finale à l'optimum?

7. En examinant la quantité précédente, peut on dire que le rendement augmente avec le risque?