EQUILIBRE GÉNÉRAL
Prix, Interactions et Marchés

Emmanuel DUGUET

2016

Sommaire

1 Une représentation de l'économie **3**
1.1 Les entreprises . . . 3
1.2 Les ménages . . . 6
1.3 Le marché . . . 9
1.4 Notations utilisées . . . 10

2 L'économie d'échanges **13**
2.1 Avec deux biens et services . . . 14
2.2 Avec un nombre quelconque de biens et services . . . 31

Table des Graphiques **51**

Table des Tableaux **52**

Introduction

CHAPITRE 1

Une représentation de l'économie

L'économie est constituée de ménages et d'entreprises. Les ménages fournissent des matières premières et des services aux entreprises, qui fournissent à leur tour des produits manufacturés et des services aux ménages. Après avoir rémunéré le travail des ménages et acheté les matières premières, les entreprises réalisent un profit en vendant leur production. Ce profit est intégralement redistribué aux ménages sous forme de dividendes. Les ménages utilisent ces revenus pour acheter des biens et services, qui leur procurent eux-mêmes d'autres revenus, comme le travail ou la vente d'un stock de bien initial. Ce chapitre vise à présenter la représentation formelle que l'on retient de l'économie pour pouvoir décrire toutes ces opérations.

1.1 Les entreprises

Les entreprises fournissent une partie des biens et services de l'économie. Elles utilisent les biens et les différents types de travail fournis par les ménages, afin d'offrir de nouveaux biens et services. On considère qu'il y a G biens et services dans l'économie. On repère ces biens par les indices $g = 1, \ldots, G$ ce que l'on note aussi $g \in G$ en utilisant la même notation pour le nombre de biens et l'ensemble des indices des biens.

Seulement une partie de ces biens et services est produite par les entreprises et une autre partie est disponible à l'état naturel ou produite par une autre institution que les entreprises comme, par exemple, l'État. La partie des biens et services non produits par les entreprises englobe les ressources naturelles et la force de travail.

La technologie de production. Les entreprises ont pour seul objectif la production. Il y a F entreprises dans l'économie, et chaque entreprise est repérée par un indice $f = 1, \ldots, F$, ce que l'on note également $f \in F$, en utilisant la convention répandue selon laquelle le nombre d'entreprises sert également à noter l'ensemble des indices des entreprises. Les opérations de production transforment des biens et services, appelés facteurs de production (*inputs*), en d'autres biens et services appelés productions (*output*). Pour des raisons pratiques, nous raisonnerons en termes de *productions nettes* et comme les entreprises offrent leurs productions, on parlera indifféremment de productions nettes et *d'offres nettes*. Les demandes nettes de facteurs des entreprises seront donc représentées par des offres nettes négatives car les entreprises consomment des facteurs, ce que l'on peut représenter comme une production négative de facteurs. Avec cette convention, un chiffre positif indique un *output* de l'entreprise, et un chiffre négatif indique un *input* de l'entreprise. On suppose également qu'il y a G biens, produits ou non, dans l'économie. Quand un bien n'est pas produit, sa production nette est tout simplement égale à 0 pour toutes les entreprises. Les productions nettes des entreprises sont rangées dans un vecteur noté y_f, avec :

$$y_f \triangleq (y_{f1}, ..., y_{fG}), \ \forall f \in F$$

quand un bien g n'est ni produit ni utilisé comme input par l'entreprise f, on a simplement $y_{fg} = 0$. Chaque entreprise possède une technologie de production qui lui permet de transformer des biens en services en productions. On résume l'ensemble des productions possibles par un *ensemble de production* noté Y_f. Il s'agit d'un résumé des possibilités technologiques, définit par :

$$Y_f = \left\{ y \in \mathbb{R}^G : F_f(y) \leq 0 \right\},$$

cet ensemble possède une frontière qui donne la production maximale possible à partir des inputs disponibles, il s'agit de la frontière de production, elle correspond à l'ensemble :

$$\overline{Y}_f = \left\{ y \in \mathbb{R}^G : F_f(y) = 0 \right\}$$

Exemple 1.1 (Cobb-Douglas). *Une entreprise produit une quantité y_1 de bien à partir de z_2 heures de travail et de z_3 unités de capital. Une technologie de type Cobb-Douglas donne :*

$$y_1 \leq A z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3}$$

ce que l'on peut réécrire :

$$Y_f = \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1 - A z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} \leq 0 \right\}$$

pour retrouver une écriture avec quantités de facteurs négatives, on pose :

$$y_2 = -z_2 < 0 \textit{ et } y_3 = -z_3 < 0$$

et l'ensemble de production peut se réécrire :

$$Y_f = \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1 - A(-y_2)^{\gamma_2} (-y_3)^{\gamma_3} \leq 0 \right\}.$$

Les quantités de facteurs sont écrites sous forme négative $(y_2, y_3) = (-z_2, -z_3)$ car ils sont utilisés par l'entreprise pour produire le bien 1 ; ils constituent des offres nettes négatives (des demandes nettes positives) de facteurs de production. La frontière de production correspond à l'enveloppe supérieure de l'ensemble de production. On la définit par :

$$\overline{Y}_f = \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1 - A(-y_2)^{\gamma_2} (-y_3)^{\gamma_3} = 0 \right\},$$

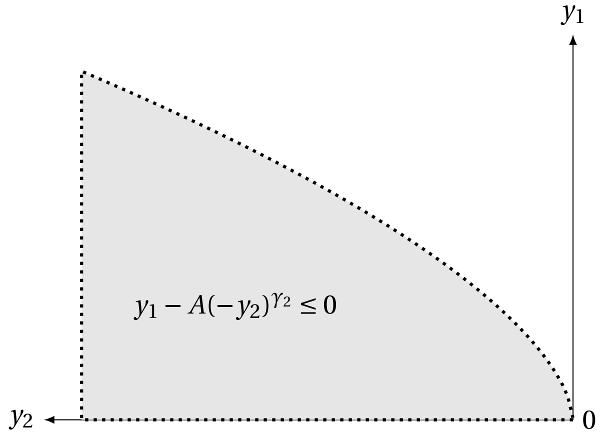
cet ensemble correspond à la fonction de production habituelle

$$y_1 = A z_2^{\gamma_2} z_3^{\gamma_3} = A(-y_2)^{\gamma_2} (-y_3)^{\gamma_3}.$$

Intuitivement, c'est sur cette frontière que les entreprises choisiront de produire. On appelle également cet ensemble la frontière technologique.

Exemple 1.2 (Ensemble de production). *On peut faire un graphique simple si on se limite à un seul facteur de production. On produit y_1 unités de biens à partir de $-y_2 > 0$ unités de travail. Le vecteur des productions nettes est donné par : $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. En prenant une fonction de production de type Cobb-Douglas, $y_1 = A(-y_2)^{\gamma_2}$, on obtient un ensemble de production convexe illustré par le graphique 1.1.*

$$Y_f = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 - A(-y_2)^{\gamma_2} \leq 0 \right\}.$$



GRAPHIQUE 1.1 – Ensemble de production

Fonction de profit. La convention qui compte les inputs négativement permet d'écrire facilement la fonction de profit, notée $\Pi_f\left(y_f\right)$. Elle est égale à :

$$\Pi_f\left(y_f\right) = \langle p, y_f \rangle = \sum_{g \in G} p_g y_{fg}$$

en effet, en définissant un ensemble d'indice pour les *outputs* $g \in G_O$ et un autre pour les *inputs* $g \in G_I$, le profit s'écrit habituellement :

$$\Pi_f\left(y_f\right) = \underbrace{\sum_{g \in G_O} p_g y_{fg}}_{\text{Recettes}} - \underbrace{\sum_{g \in G_I} p_g(-y_{fg})}_{\text{Coûts}}$$

car $y_{fg} < 0 \ \forall g \in G_I$. Remarquons ici que si un bien n'intervient pas dans la production, on a $y_{fg} = 0$ de sorte qu'on peut le mettre indifféremment dans G_I ou G_O sans affecter les résultats.

Maximisation du profit. L'objectif de chaque entreprise est de maximiser son profit sous la contrainte technologique. Ceci permet d'obtenir les valeurs optimales des offres nettes de biens et services et des demandes nettes de facteurs, que l'on peut interpréter comme des offres nettes négatives, suivant la convention adoptée plus haut. On raisonne donc toujours en offres nettes pour les entreprises. Le vecteur d'offres nettes de l'entreprise f est défini par :

$$\tilde{y}_f(p) = \arg\max_{y_f} \Pi_f\left(y_f\right)$$
$$y_f \in Y_f$$

ces offres nettes dépendent des prix des biens et de la technologie de production. Nous insistons ici sur la dépendance par rapport aux prix, car ce sont les prix que nous déterminerons plus loin. On obtient donc le vecteur de fonctions suivant :

$$\tilde{y}_f(p) = \left(\tilde{y}_{f1}(p), \ldots, \tilde{y}_{fG}(p)\right), \ \forall f \in F$$

Offres nettes agrégées. Les offres nettes des entreprises permettent de définir les offres nettes agrégées de biens provenant des entreprises :

$$Y_g(p) \triangleq \tilde{y}_{\bullet g}(p) = \sum_{f \in F} \tilde{y}_{fg}(p), \ \forall g \in G$$

dans le cas général il ne s'agit que d'une des sources possibles de bien g. Si ce bien existe également à l'état naturel, il faudra en tenir compte comme indiqué plus loin. Dans l'expression qui précède le $\bullet$ désigne la somme sur un indice donc $\tilde{y}_{\bullet g}(p)$ désigne la somme des $\tilde{y}_{fg}(p)$.

Dividendes. Les profits réalisés par les entreprises sont redistribués aux ménages qui obtiennent ainsi un revenu non salarial. Les ménages sont repérés par un indice $h = 1,\ldots,H$ ce que l'on note aussi $h \in H$. Ainsi H représente à la fois le nombre de ménages et l'ensemble de leurs indices.

Dans la version la plus simple, chaque ménage h dispose d'une part fixe θ^0_{hf} de l'entreprise f. Le vecteur des parts possédées par le ménage h est noté :

$$\theta^0_h = (\theta^0_{h1},\ldots,\theta^0_{hF}),\ \forall h \in H$$

et le vecteur des profits des entreprises est noté :

$$\Pi = \left(\Pi_1\left(\tilde{y}_1\right),\ldots,\Pi_F\left(\tilde{y}_F\right)\right)$$

Par définition, les parts vérifient :

$$0 \le \theta^0_{hf} \le 1,\ \sum_{h\in H}\theta^0_{hf} = 1\ \forall f \in F$$

L'exposant 0 rappelle qu'il s'agit de parts initiales. Dans les versions les plus élaborées du modèle d'équilibre général, il est possible d'échanger des actions sur le marché boursier, auquel cas on note les parts θ_{hf}. Les dividendes qu'un ménage h obtient, dans le cas le plus simple, sont égaux à :

$$A_h(p) \triangleq \langle\theta^0_h,\Pi\rangle = \sum_{f\in F}\theta^0_{hf}\Pi_f\left(\tilde{y}_f(p)\right),\ h \in H$$

1.2 Les ménages

Les ménages prennent des décisions de consommation. Ils prennent leurs décisions sur la base de fonctions d'utilité qui constituent un moyen d'associer un indice de satisfaction à un panier de biens et services. Pour financer les biens et services, ils disposent d'un revenu noté M_h. Le panier de biens consommé par le ménage h est noté x_h :

$$\underset{(1,G)}{x_h} \triangleq (x_{h1},\ldots,x_{hG}),\ h \in H$$

Ce panier de bien procure une utilité notée $U_h(x_h)$. Parmi les x_h on fera figurer le temps de loisir, pas de travail car, par convention, il faut que l'utilité soit croissante en tous ses arguments. Chaque ménage recherche à maximiser son utilité sous contrainte de revenu, ce qui détermine ses demandes, notées $\tilde{x}_h(p)$. L'ensemble de budget du ménage h représente l'ensemble des dépenses qu'il peut réaliser. Par définition, ce sont toutes les dépenses qui ne dépassent pas son revenu. On obtient donc l'ensemble de budget suivant :

$$B_h = \left\{x : \langle p,x\rangle \le M_h\right\}$$

où

$$\langle p,x\rangle = \sum_{g\in G}p_g x_{hg}$$

Les revenus du ménage proviennent essentiellement de deux sources. Premièrement, les ménages disposent de dotations initiales de biens et de temps qu'il peuvent consacrer au travail. On note ω_{hg} la dotation initiale de bien ou service g possédée par le ménage h. Les biens sont soit hérités soit produits. On considère qu'il existe une répartition initiale des ressources avant les échanges sur les marchés. On peut voir cette répartition initiale comme une notion d'héritage. Pour les biens matériels, les quantités de biens que l'on possède sont effectivement analogue à un héritage. On en est propriétaire sans contrepartie économique et on peut décider de les vendre si on y trouve un intérêt. Les dotations initiales de services, elles, sont représentés essentiellement par le travail. On dispose d'un certain nombre d'heures que l'on peut consacrer au travail ou aux loisirs. Le nombre d'heures de la dotation initiale est donc une quantité potentielle maximale que l'on peut consacrer au travail. Cette quantité résulte du niveau de formation que l'on a reçu et de notre état de santé. On peut donc le voir comme un héritage au sens large, que l'on peut réaliser en faisant l'effort de travailler. Les dotations initiales de biens et services du ménage h sont rangées dans un vecteur :

$$\omega_h = (\omega_{h1}, \ldots, \omega_{hG}), \; h \in H$$

et la vente de ces dotations génère un revenu potentiel noté D_h :

$$D_h \triangleq \langle p, \omega_h \rangle = \sum_{g \in G} p_g \omega_{hg}$$

Le travail. Parmi les dotations initiales un service joue un rôle particulièrement important : le travail. Son importance vient de deux raisons principales : d'une part, tous les ménages ont une dotation en travail et d'autre part, la production est impossible sans travail. On dit que le travail est un facteur de production *essentiel*. Deux éléments caractérisent le travail : la quantité, mesurée en temps, et son type. Le type de travail concerne aussi bien sa spécificité ou spécialisation que sa qualité. On considérera donc, dans les modèles les plus complets, des types différents de travail. Pour cela on considère un ensemble d'indices, noté $L \subset G$ (pour *Labor*), et défini de la manière suivante : tout bien g tel que $g \in L$ est un type de travail. [1] La dotation initiale en travail du ménage h est donnée par ω_{hg} avec $g \in L$. Avec cette convention, chaque ménage possédera des types de travail qui lui sont propres. On peut également adopter une décomposition par métier. On remarque ici que la quantité ω_{hg} n'a aucune raison d'être égale à 24h. Si on considère qu'une personne ne peut travailler que 8h par jour, alors la dotation initiale de temps sera simplement égale à 8. Si un ménage est composé de deux personnes ayant deux métiers différents, que la première personne peut travailler 4h par jour et la seconde 10h par jour, on obtiendra une dotation initiale de temps de la forme $(4, 10)$ pour ce ménage. Si le ménage h n'a pas la compétence $g \in L : \omega_{hg} = 0$. On ne compte généralement pas le temps domestique ou le temps de transport dans les loisirs car ils n'accroissent (généralement) pas l'utilité du ménage. A moins d'en faire un objet d'étude, on les retire de l'analyse. Mais on peut en tenir compte indirectement : si l'on passe une heure de moins dans les transports suite à un déménagement, on considérera que la dotation initiale de temps disponible s'accroît d'une heure, et cette heure peut ensuite être affectée au travail ou aux loisirs. Les dotations initiales peuvent donc varier dans le temps, ce que nous verrons quand nous aborderons les modèles dynamiques.

Deuxièmement, les ménages possèdent des droits de propriété sur les entreprises et reçoivent donc leurs profits au prorata des actions qu'ils possèdent. Il s'agit des dividendes D_h

1. Pour information, le code ROME (Répertoire Opérationnel des Métiers et Emplois) de Pôle Emploi renvoit à 531 fiches regroupant plus de 10 000 appellations différentes de métiers et emplois.

que nous avons défini dans la section précédente. Globalement, le revenu du ménage est défini par :

$$M_h(p) = A_h(p) + D_h(p),$$

il dépend des prix pratiqués dans l'économie. L'ensemble budgétaire s'écrit alors :

$$B_h = \left\{ \sum_{g \in G} p_g x_{hg} \leq M_h(p) \right\}$$

on remarque que cette expression implique que les temps disponibles pour le travail (les loisirs) sont évalués à leur coût d'opportunité. Pour le voir, isolons les revenus du travail dans $D_h(p)$.

$$D_h(p) = \sum_{g \in L} p_g \omega_{hg} + \sum_{g \notin L} p_g \omega_{hg}$$

et utilisons

$$\sum_{g \in G} p_g x_{hg} = \sum_{g \in L} p_g x_{hg} + \sum_{g \notin L} p_g x_{hg},$$

on peut réécrire contrainte budgétaire sous la forme :

$$\sum_{g \notin L} p_g x_{hg} \leq \underbrace{A_h(p) + \sum_{g \notin L} p_g \omega_{hg}}_{\text{Revenus non salariaux}} + \underbrace{\sum_{g \in L} p_g \left(\omega_{hg} - x_{hg}\right)}_{\text{Salaires}},$$

car $\omega_{hg} - x_{hg}$ est le temps de travail de type $g \in L$. Tout se passe donc comme si on facturait le temps de loisir $g \in L$ au prix p_g. On dit que les heures de loisirs sont évalués à leur coût d'opportunité, qui diffère selon le métier exercé.

Exemple 1.3 (Ensemble de budget)**.** *Si un ménage de revenu M consomme un bien en quantité x_1 et prend x_2 heures de loisirs, sa contrainte budgétaire s'écrit :*

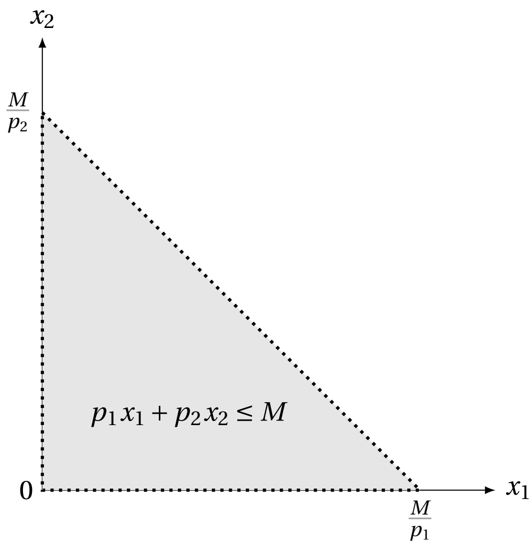
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq M, x_1, x_2 \geq 0$$

cet ensemble forme un triangle délimité par la droite d'équation $x_2 = (M - p_1 x_1)/p_2$ et l'orthant positif, comme le montre le graphique 1.2. La contrainte est obtenue en évaluant le loisir à son coût d'opportunité (le salaire).

Le programme du ménage h est donc le suivant :

$$\tilde{x}_h(p) = \arg\max_{\tilde{x}_h} U_h(\tilde{x}h)$$
$$\tilde{x}_h \in B_h$$

La quantité $\tilde{x}_{hg}(p)$ est appelée *fonction de demande* de bien g du ménage h. En fait, à partir de ces demandes, on peut calculer soit des demandes nettes soit des offres nettes. En effet, les ménages possèdent déjà des biens, les dotations initiales ω_{hg}, avant d'émettre des demandes de sorte que la quantité qu'ils demandent au marché et en fait égale à $\tilde{x}_{hg} - \omega_{hg}$. Quand cette quantité est positive, on parle de *demande nette* car le ménage h souhaite consommer plus de bien g qu'il n'en possède et doit donc se les procurer sur le marché ; à l'inverse, quand la différence $\tilde{x}_{hg} - \omega_{hg}$ est négative, on parle *d'offre nette* car le ménage demande moins de bien qu'il en possède déjà. Il offrira donc du bien g sur le marché pour se procurer le revenu nécessaire à ses consommations.



GRAPHIQUE 1.2 – Ensemble de budget

Demandes nettes. Les offres et les demandes de travail se définissent de la manière suivante. Si $\tilde{x}_{hg} < \omega_{hg}$ et si $g \in L$, le ménage h offre son travail de type g car il utilise moins que son temps disponible pour les loisirs. Sa demande nette de travail est alors négative ; si $\tilde{x}_{hg} > \omega_{hg}$ et si $g \in L$, le ménage h demande un travail de type g ; il peut donc embaucher une personne d'un autre ménage, sa demande nette de travail est positive. Une motivation pour embaucher se présente clairement quand $\omega_{hg} = 0$. Ce cas se présente couramment pour les services à la personne. Pour les autres biens et services, l'interprétation est similaire : si $\tilde{x}_{hg} < \omega_{hg}$ et si $g \notin L$, le ménage vend du bien g, puisque sa consommation est inférieure à sa dotation initiale, sa demande nette est positive ; si $\tilde{x}_{hg} > \omega_{hg}$ et si $g \notin L$, le ménage achète du bien g, puisque sa consommation est supérieure à sa dotation initiale, sa demande nette est négative ;

Demandes agrégées. A partir des demandes individuelles $\tilde{x}_h(p)$ on définit les demandes agrégées de bien et services qui représentent les quantités de biens et services demandées par l'ensemble des ménages. Pour le bien g on définit la demande agrégée par :

$$X_g(p) \triangleq \tilde{x}_{\bullet g}(p) = \sum_{h \in H} \tilde{x}_{hg}(p),$$

c'est cette demande agrégée qui sera confrontée à l'offre agrégée sur le marché.

1.3 Le marché

Le marché est le lieu, physique ou virtuel, où s'échangent les biens et services. Sur les marchés les offres sont confrontées à la demande. On suppose alors qu'il existe un mécanisme permettant de trouver un vecteur de prix de marché p qui égalise les offres et les demandes sur tous les marchés. Si un tel système de prix existe, on le note p^*. Nous distinguerons les cas sans production et avec production.

Économie d'échanges. Une économie sans production s'appelle une économie d'échanges, car les agents se contentent d'échanger leurs dotations initiales en fonction des prix du marché.

Dans ce cas la condition d'équilibre est définie par les égalités entre les demandes agrégées des ménages et les offres agrégées représentées par les dotations initiales. Formellement, la condition d'équilibre est : $X_g\left(p^*\right) = \omega_{\bullet g}\ \forall g \in G$. On en déduit *l'allocation d'équilibre* notée $x^* \triangleq (\tilde{x}_1(p^*), \dots, \tilde{x}_G(p^*))$ et les échanges réalisés par les ménages $\omega_{hg} - \tilde{x}_{hg}(p^*)$. Leur revenu d'équilibre est donné par $M_h(p^*) = D_h(p^*)$. L'existence d'échanges indique que les ménages ont amélioré leur utilité grâce aux échanges parce qu'ils sont obtenus par maximisation de l'utilité.

Économie avec production. Dans une économie avec production, il faut ajouter les offres nettes des entreprises aux dotations initiales. En effet, la quantité $Y_g + \omega_{\bullet g}$ représente l'offre de biens et services nette des consommations intermédiaires et des heures de travail que les entreprises ont utilisé. Ce sont ces offres nettes qui seront confrontées à la demande agrégée des consommateurs. La condition d'équilibre devient : $X_g\left(p^*\right) = Y_g(p^*) + \omega_{\bullet g}\ \forall g \in G$. Le revenu d'équilibre est maintenant donné par $M_h(p^*) = A_h(p^*) + D_h(p^*)$. Le fait que le revenu des ménages dépendent du profit a un impact important sur la méthode de recherche du prix d'équilibre. Il faut résoudre les programmes des entreprises en premier pour trouver les expressions des profits, ce qui permet d'écrire les revenus des ménages, puis de résoudre les programmes des ménages.

1.4 Notations utilisées

Les notations suivantes sont utilisées dans tout le polycopié.

— ω : dotations initiales ou contingentes des ménages.

— x : consommations d'un ménage. $\widetilde{x}$: demande walrasienne d'un ménage en fonction des prix et du revenu. x^d :demande d'un ménage en fonction des prix et des dotations initiales. X_g^d : demande agrégée de bien g des ménages en fonction des prix et des dotations initiales.

— ℓ : temps de travail d'un ménage.

— y : productions d'une entreprise. Les outputs sont comptés positivement, les inputs négativement. $\widetilde{y}$: offre nette d'une entreprise en fonction des prix. Y : offre nette agrégée des entreprises. On y ajoute les dotations initiales pour obtenir l'offre nette agrégée de bien g : $X_g^o \triangleq Y_g + \omega_{\bullet g}$.

— M : revenu en fonction des prix et des dotations.

— p : prix courant des biens et services.

— r : taux d'intérêt ou taux de rendement.

— β : facteur d'actualisation.

— π : probabilité.

— q : prix du numéraire sur les marchés contingents.

— k : quantité d'actif financier.

Nous utilisons les indices suivants :

— Ménages : h et m (pour "$h$ouseholds" et "$m$énages"). Ces deux indices varient par défaut de 1 à H. On notera indifféremment $h, m = 1, ..., H$ et $h, m \in H$.

— Biens : g et b (pour "$g$oods" et "$b$iens"). Ces deux indices varient par défaut de 1 à G. On notera indifféremment $g, b = 1, ..., G$ et $g, b \in G$.

— Entreprises : f et e (pour "$f$irms" et "$e$ntreprises"). Ces deux indices varient par défaut de 1 à F. On notera indifféremment $f, e = 1, ..., F$ et $f, e \in F$.

— Temps : t et τ (pour "temps" ou "time"). Ces deux indices varient par défaut de 0 à T. On notera indifféremment $t, \tau = 0, ..., T$ et $t, \tau \in T$.
— Etats de la nature : s et n (pour "$s$tate" et "$n$ature"). Ces deux indices varient par défaut de 1 à S. On notera indifféremment $s, n = 1, ..., S$ et $s, n \in S$.

Nous illustrons les principes généraux à partir de fonctions de Cobb-Douglas. Les notations des paramètres sont les suivantes :

— α : élasticité de la fonction d'utilité à la consommation d'un bien.
— a : ratio des élasticités de la fonction d'utilité à la somme des élasticités de la même fonction.
— γ : élasticité de la production à l'utilisation d'un facteur de production.
— A : productivité globale des facteurs.

CHAPITRE 2

L'économie d'échanges

L'équilibre général s'intéresse à la théorie des prix et de l'allocation des ressources. Cette théorie cherche à décrire l'ensemble des opérations de production, d'échange et de consommation de tous les agents d'une économie, de la manière la plus simple possible. Les échanges que nous étudions ont lieu sur un marché : ils portent sur un bien ou service donné, en un lieu donné, à une date donnée et pour une réalisation donnée des aléas de l'économie. Pour simplifier l'ensemble de l'analyse, ce premier cours supposera que la concurrence est parfaite : chaque agent se comporte comme si le prix de marché était donné car il a conscience qu'il ne peut pas l'influencer.

L'équilibre général permet de rendre compte des interactions entre tous les agents économiques :

- certains marchés ne peuvent pas être considérés comme isolés du reste de l'économie :
  - le marché du travail : ce facteur de production intervient dans la production de tous les biens et services
  - les marchés financiers : ils sont utilisés par tous les agents
- certaines actions ne restent pas isolées dans un secteur particulier de l'économie :
  - les prélèvements fiscaux et sociaux
  - la fixation des taux d'intérêt par la Banque Centrale Européenne

Les modèles dérivés de la théorie de l'équilibre général permettent d'évaluer comment une économie réagirait à différents changements

- de politique économique (retraites, exonérations de charges)
- de ressources naturelles (renouvelables ou non)
- ces modèles permettent aussi d'évaluer l'optimum social et donc de comparer différents scénarios économiques d'un point de vue normatif.

Les agents économiques d'une économie d'échanges sont les ménages, parce qu'il n'y a pas de production. Le ménage est représenté avant tout comme une unité de décision. Il peut offrir et demander des biens et des services. Par exemple, il peut offrir son travail et demander des biens de consommation ou des services. C'est une hypothèse simplificatrice sur la manière dont se prennent les décisions au sein d'une unité de consommation de base, au sein des vrais ménages. On parle de modèle unitaire, qui est le modèle dominant pour le traitement de la plupart des problèmes économiques. Il existe des développements sur les décisions au sein des ménages que nous ne prendrons pas en compte ici. Dans ce cours, nous considérerons donc que l'unité de décision de base en matière de consommation et d'offre de travail est le ménage. Le ménage dispose de ressources, comme son travail et, éventuellement, des biens accumulés par le passé, et il doit décider de ses dépenses. Le ménage peut consommer des biens ou louer le travail d'un autre ménage.

Dans un premier temps, nous allons présenter le cas le plus simple d'une économie avec deux ménages et deux biens, avant d'étudier le cas général avec un nombre quelconque de ménages et de biens et services.

2.1 Avec deux biens et services

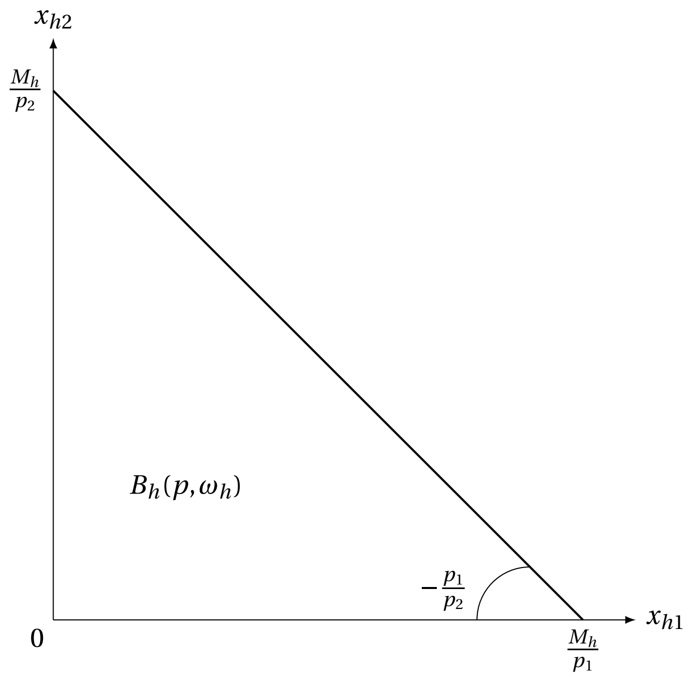
Dans un premier temps, nous considérerons les ménages séparément pour étudier la manière dont ils prennent leurs décisions. Dans un second temps, nous agrégerons leurs décisions pour étudier la manière dont se fixent les prix de marché.

2.1.1 Economie d'échanges et équilibre concurrentiel

Quand on étudie une économie avec seulement deux biens et services, un des deux biens est nécessairement le travail et l'autre un bien de consommation dit composite car il représente l'ensemble des consommations de biens et services du ménage autres que le travail. C'est une décomposition souvent utilisée. On représente les consommations du ménage h par un vecteur $x_h = (x_{h1}, x_{h2})$ où x_{h1} est la quantité de bien composite consommée par le ménage et x_{h2} le temps de loisir pris par le ménage. On prend le temps de loisir et non le temps de travail parce que l'utilité du ménage se définit par rapport au loisir. Pour passer au temps de travail, il faut connaître le temps disponible du ménage, qui varie d'un ménage à l'autre. Les ménages possèdent en début de période une dotation initiale de biens et services, que l'on note $\omega_h = (\omega_{h1}, \omega_{h2})$. Certaines peuvent être nulles, mais pas toutes en même temps pour que le ménage puisse avoir un revenu, par exemple en travaillant. La dotation initiale du ménage h en bien composite est noté ω_{h1} et sa dotation initiale de temps est notée ω_{h2}. Cette dotation en temps représente la partie de la journée qui peut être consacrée au travail ou aux loisirs ; elle n'est pas forcément égale à 24h par jour, car on peut enlever le temps de transport et de sommeil par exemple. Elle peut également varier d'un ménage à l'autre, en fonction du nombre de membres du ménage, de leur âge ou de leur état de santé. Le temps de travail d'un individu peut donc se définir comme le temps qu'un individu ne consacre pas aux loisirs compte-tenu du temps déjà retiré du total de 24h pour le sommeil et les transports. Ce temps de travail est égal à $\ell_h \triangleq \omega_{h2} - x_{h2}$.

La contrainte budgétaire. Les dotations initiales des agents déterminent leur revenu parce qu'il n'y a pas de production. Si le bien 1 est vendu au prix p_1 et le bien 2 au prix p_2, la valeur des dotations initiales constitue le revenu, que l'on note M_h. On obtient donc $M_h \triangleq p_1\omega_{h1} + p_2\omega_{h2}$. En fait, il s'agit du revenu *maximum* que le ménage peut obtenir en vendant la totalité de sa dotation initiale de bien composite ω_{h1} et en travaillant pendant la totalité de son temps disponible ω_{h2}. Nous montrons maintenant que l'on peut bien réécrire la contrainte budgétaire classique du ménage en fonction de ce revenu maximum. C'est la convention la plus répandue dans la littérature scientifique. Si un ménage h consomme x_{h1} unités de bien 1 et travaille pendant une durée ℓ_h, sa contrainte budgétaire se résume au fait que ses dépenses en bien 1 ne doivent pas excéder ses revenus obtenus en vendant sa dotation initiale de bien composite ω_{h1} et en travaillant ℓ_h heures. On obtient donc la contrainte budgétaire suivante :

$$p_1 x_{h1} \leq p_1\omega_{h1} + p_2\ell_h$$



GRAPHIQUE 2.1 – Ensemble de budget

comme nous avons $\ell_h \triangleq \omega_{h2} - x_{h2}$, nous pouvons écrire :

$$p_1 x_{h1} \leq p_1 \omega_{h1} + p_2(\omega_{h2} - x_{h2}) \Leftrightarrow p_1 x_{h1} + p_2 x_{h2} \leq p_1 \omega_{h1} + p_2 \omega_{h2} = M_h.$$

Avec cette écriture, tout se passe comme si le ménage achetait du temps de loisir x_{h2} au prix unitaire p_2. Comme p_2 représente ici le salaire horaire, on dit que p_2 est le coût d'opportunité du loisir, ou que le loisir est évalué à son coût d'opportunité. Ceci signifie qu'en prenant une heure de loisir on renonce à une heure de salaire, de sorte qu'une heure de loisir coûte p_2. La contrainte (2.1.1) permet de définir l'ensemble de budget du ménage :

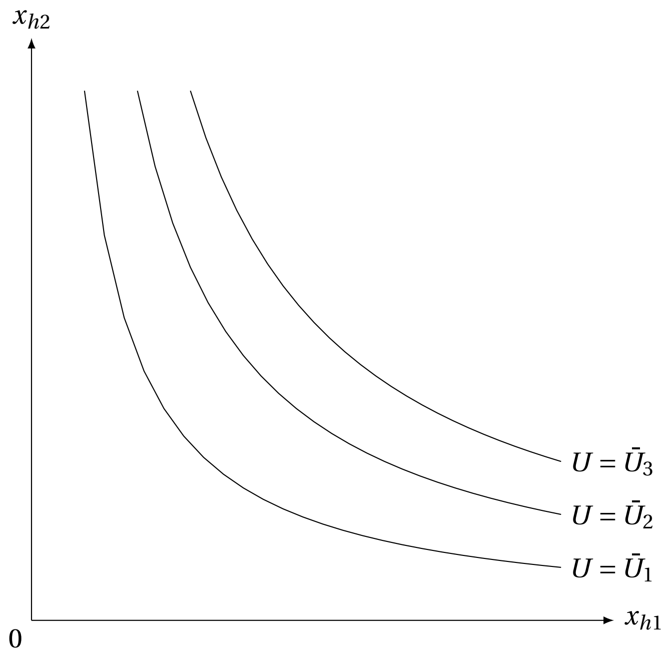
$$B_h(p,\omega_h) = \{x_h : p_1 x_{h1} + p_2 x_{h2} \leq M_h\}.$$

La frontière supérieure de cet ensemble est appelée la *droite de budget*. On la représente généralement dans le plan $x_{h1}0x_{h2}$ sous la forme :

$$x_{h2} = \frac{M_h - p_1 x_{h1}}{p_2}$$

elle est représentée sur le graphique 2.1.

La maximisation de l'utilité. Les préférences du ménage h sont représentées par une fonction d'utilité $U_h(x_{h1}, x_{h2})$ qui fournit un indice de satisfaction associé au panier de biens et services (x_{h1}, x_{h2}). Quand le ménage consomme x_{h1} unités de bien composite et prend x_{h2} heures de loisirs, il évalue sa satisfaction par un score égal à $U_h(x_{h1}, x_{h2})$. Cette utilité est ordinale, ce qui compte est la capacité de l'individu à classer les paniers de biens entre eux. Par convention, cette fonction d'utilité est écrite de façon à être croissante par rapport à tous ses arguments. C'est pour cette raison qu'on l'écrit le plus souvent en fonction du temps de loisir et non en fonction du temps de travail. On définit la courbe d'iso utilité comme la courbe indiquant les quantités x_h qui fournissent une utilité constante, notée $\bar{U}$.



GRAPHIQUE 2.2 – Courbes d'iso utilité

Exemple 2.1 (Utilité Cobb-Douglas)**.** *Les préférences sont représentées par la fonction :*

$$U_h(x_h) = x_{h1}^{\alpha_1} x_{h2}^{\alpha_2},\ \alpha_1, \alpha_2 > 0,$$

ce qui donne les courbes d'iso-utilité :

$$U_h(x_h) = \bar{U} \Leftrightarrow x_{h2} = \left(\frac{\bar{U}}{x_{h1}^{\alpha_1}}\right)^{\alpha_2}.$$

On représente les courbes d'iso utilité de type Cobb-Douglas sur le graphique 2.2. Chaque courbe indique en fait l'ensemble des substitutions possibles entre consommation et loisirs pour un même niveau d'utilité. Le point précis qui sera choisi par le consommateur dépendra de sa contrainte budgétaire, donc des prix des biens et de ses dotations initiales.

Les demandes walrasiennes. Afin de prévoir les choix des ménages, on fait l'hypothèse de maximisation de l'utilité. En maximisant l'utilité du ménage h on obtient ses fonctions de demande walrasiennes, rangées dans un vecteur $\tilde{x}_h(p, M_h) = \big(\tilde{x}_{h1}(p, M_h), \tilde{x}_{h2}(p, M_h)\big)$. Le programme du consommateur devient alors :

$$\tilde{x}_h(p, M_h) = \arg\max_{x_h} U_h(x_h)$$
$$x_h \in B_h(p, \omega_h)$$

Pour résoudre ce problème, on utilise souvent le Lagrangien suivant :

$$\mathscr{L}_h(x_h) = U_h(x_{h1}, x_{h2}) - \lambda_h(p_1 x_{h1} + p_2 x_{h2} - M_h)$$

Les conditions du premier ordre sont données par :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{h1}}(\tilde{x}_h) = \frac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{h1}} - \lambda_h p_1 = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{h2}}(\tilde{x}_h) = \frac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{h2}} - \lambda_h p_2 = 0 \tag{2.2}$$

$$\tag{2.3}$$

$$\lambda_h \left(p_1 \tilde{x}_{h1} + p_2 \tilde{x}_{h2} - M_h\right) = 0,\ \lambda_h \geq 0 \tag{2.4}$$

De la relation (2.1) on peut déduire que :

$$\lambda_h = \frac{1}{p_1} \times \frac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{h1}}$$

et cette quantité est strictement positive dès lors que l'utilité marginale l'est également. Il suffit donc que les préférences ne présentent pas de satiété pour que $\lambda_h > 0$. On aurait pu tenir ce raisonnement à partir du loisir également (équation 2.2) de sorte que le point qui compte est qu'il existe un bien pour lequel il n'y ait pas de satiété, définie comme une utilité marginale strictement positive au maximum d'utilité. Dans ce cas, en utilisant la relation (2.4), on obtient :

$$\lambda_h > 0 \Rightarrow p_1 \tilde{x}_{h1} + p_2 \tilde{x}_{h2} = M_h$$

la contrainte budgétaire est saturée au maximum d'utilité. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas, cela signifierait qu'il resterait une partie du revenu non dépensée. Mais s'il n'y a pas de satiété on peut dépenser cette partie de revenu pour acheter un bien ou service et accroître son utilité. Donc on ne peut pas maximiser son utilité en ne dépensant qu'une partie de son revenu. Géométriquement, le point solution se trouve sur la droite de budget. Des relations (2.1) et (2.2), on déduit :

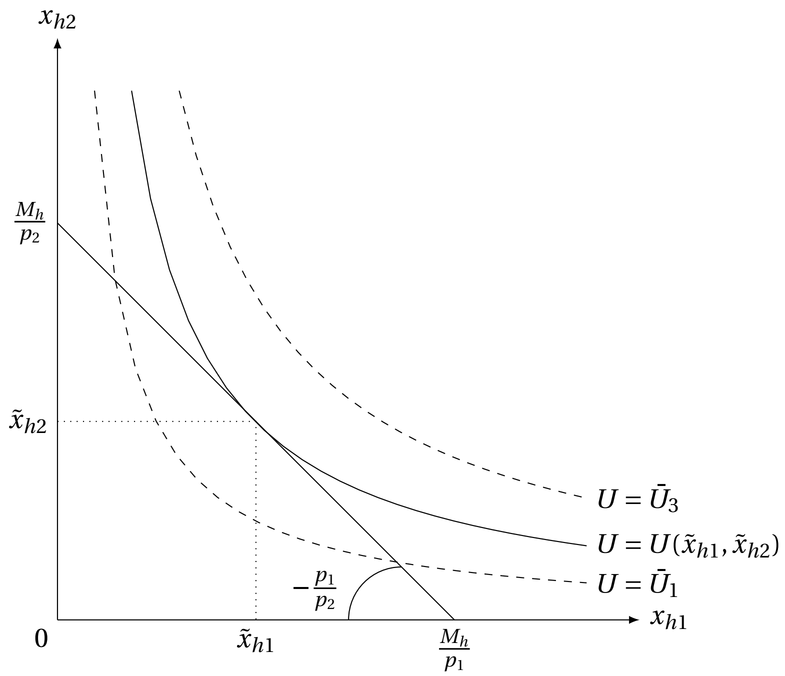
$$\frac{\dfrac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{h1}}}{\dfrac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{h2}}} = \frac{p_1}{p_2}$$

Le membre de gauche de l'équation ci-dessus représente le nombre d'unités de loisir (bien 2) qu'il faut pour compenser la perte d'une unité de bien de consommation composite (bien 1). Il s'agit du taux marginal de substitution. Le membre de droite représente le nombre d'unités de bien 2 (loisir) que l'on peut se payer sur le marché en vendant une unité de bien 1 (consommation). En effet, en vendant une unité de bien 1 on se procure un revenu égal à p_1, le prix unitaire de ce bien. D'autre part, avec une somme d'argent R, on peut acheter R/p_2 unités de bien 2 (loisir). Donc, avec un revenu p_1 on peut acheter p_1/p_2 unités de loisir. L'équation ci-dessus signifie donc qu'au maximum d'utilité les préférences doivent être compatibles avec les prix de marché. Géométriquement, cette propriété signifie que la courbe d'iso-utilité doit être tangente à la droite de budget. En effet, par définition, la courbe d'indifférence au maximum d'utilité peut être approximée par :

$$\mathrm{d}U \simeq \frac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{h1}} \mathrm{d}x_{h1} + \frac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{h2}} \mathrm{d}x_{h2}$$

et comme l'utilité ne varie pas le long d'une courbe d'indifférence, $\mathrm{d}U = 0$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}x_{h2}}{\mathrm{d}x_{h1}} = -\frac{\dfrac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{h1}}}{\dfrac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{h2}}}.$$



GRAPHIQUE 2.3 – Maximisation de l'utilité

Globalement, on doit donc avoir l'égalité des pentes de la droite de budget et de la courbe d'indifférence :

$$-\frac{\frac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{h1}}}{\frac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{h2}}} = -\frac{p_1}{p_2}$$

Comme le niveau d'utilité s'accroît quand les courbes d'indifférence se déplacent vers le Nord-Ouest du graphique, cette propriété signifie que le ménage choisit le niveau d'utilité le plus élevé compatible avec sa contrainte budgétaire, comme le montre le graphique 2.3.

Exemple 2.2 (Cas Cobb Douglas à deux biens.). *On considère dans cet exemple que la fonction d'utilité est donnée par :*

$$x_{h1}^{\alpha_1} x_{h2}^{\alpha_2},\ \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

Il est équivalent de maximiser cette fonction ou toute transformation croissante. Nous prenons la transformation logarithmique :

$$U_h(x_{h1}, x_{h2}) = \ln\left(x_{h1}^{\alpha_1} x_{h2}^{\alpha_2}\right) = \alpha_1 \ln x_{h1} + \alpha_2 \ln x_{h2}$$

d'où les conditions du premier ordre :

$$\frac{\frac{\alpha_1}{\tilde{x}_{h1}}}{\frac{\alpha_2}{\tilde{x}_{h2}}} = \frac{p_1}{p_2},\ \ et\ \ p_1 \tilde{x}_{h1} + p_2 \tilde{x}_{h2} = M_h$$

de la première relation, on obtient :

$$p_2 \tilde{x}_{h2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} p_1 \tilde{x}_{h1}$$

et en utilisant la contrainte budgétaire, il vient :

$$\tilde{x}_{h1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \times \frac{M_h}{p_1}$$

d'où

$$\tilde{x}_{h2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{p_1 \tilde{x}_{h1}}{p_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \times \frac{M_h}{p_2}$$

On voit que les demandes walrasiennes sont décroissantes par rapport aux prix (à revenu donné) et croissantes par rapport au revenu (à prix donnés). Il faut toutefois faire attention à un point important. Dans un modèle d'équilibre général, on représente explicitement la dépendance des revenus aux prix. On a $M_h = p_1\omega_{h1} + p_2\omega_{h2}$, ce qui modifie l'expression des demandes. Les fonctions de demande individuellessont donc données par :

$$x_{h1}^d(p, \omega_h) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \times \frac{M_h}{p_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \times \left(\omega_{h1} + \frac{p_2}{p_1}\omega_{h2}\right)$$

et le prix du bien 1 ne fait décroître la demande de bien 1 du ménage h que si $\omega_{h2} > 0$. Si ce ménage ne possède que du bien 1 en dotations initiales, une variation du prix du bien 1 n'aura aucun effet sur sa demande de bien 1. Examinons la demande de bien 2, en remplaçant le revenu par son expression et en simplifiant on obtient :

$$x_{h2}^d(p, \omega_h) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \times \left(\frac{p_1}{p_2}\omega_{h1} + \omega_{h2}\right)$$

et cette fois ci le prix du bien 2 n'affecte la demande de bien 2 que si le ménage h possède des dotations initiales de bien 1.

On a donc systématiquement deux effets des prix sur la demande : un effet de substitution, quand le prix d'un bien augmente la demande qui lui est adressée diminue à revenu identique, et un effet de revenu, quand le prix d'un bien augmente, le revenu des ménages qui possèdent des dotations de ce bien augmente également. Globalement, il est donc possible qu'une augmentation du prix d'un bien n'ait pas pour effet de diminuer la demande de certains ménages pour ce bien. La demande que l'on doit prendre en compte pour déterminer le prix d'équilibre est celle qui prend explicitement en compte la dépendance des revenus vis-à-vis des prix.

Les prix d'équilibre. Il faut répartir les dotations initiales entre les consommateurs. Ces dotations représentent les offres de bien et services. La manière dont les dotations sont allouées est déterminée par l'économie de marché : on recherche un prix qui rendent l'offre agrégée compatible avec la demande agrégée. L'offre agrégée de bien 1 est définie par :

$$X_1^o = \sum_{h \in H} \omega_{h1} = \omega_{\bullet 1}$$

et celle de bien 2 par :

$$X_2^o = \sum_{h \in H} \omega_{h2} = \omega_{\bullet 2}$$

ces offres agrégées sont confrontées à la demande agrégée sur les marchés. La demande agrégée de bien 1 est définie par :

$$\begin{aligned} X_1^d &= \sum_{h\in H} x_{h1}^d \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} \times \left(\sum_{h\in H} \omega_{h1} + \frac{p_2}{p_1} \sum_{h\in H} \omega_{h2} \right) \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} \times \left(\omega_{\bullet 1} + \frac{p_2}{p_1} \omega_{\bullet 2} \right) \end{aligned}$$

et celle de bien 2 par :

$$X_2^d = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} \times \left(\frac{p_1}{p_2} \omega_{\bullet 1} + \omega_{\bullet 2} \right)$$

Pour trouver le prix d'équilibre, il suffit de réaliser l'équilibre de l'offre et de la demande sur un seul marché. C'est la loi de Walras : si $G-1$ marchés sont à l'équilibre, le G-ième est à l'équilibre. C'est une conséquence des contraintes budgétaires des ménages. Nous montrons cette propriété en annexe dans le cas général. La conséquence de la loi de Walras est que nous ne pouvons déterminer que des prix relatifs. Il faut donc fixer un numéraire, c'est-à-dire un bien ou service de référence qui serve d'étalon des prix. Dans notre modèle, un choix immédiat et de choisir le loisir, dont le prix unitaire est le salaire horaire, de sorte que le prix du bien de consommation sera exprimé en nombre d'heures de travail. Le prix relatif p_1/p_2 est en effet égal au nombre d'heures de travail (i.e. de bien 2) qu'il faut fournir pour se procurer une unité de bien de consommation (i.e., de bien 1). En utilisant la condition d'équilibre sur le marché du travail, on obtient :

$$\begin{aligned} & X_2^o = X_2^d \\ \Leftrightarrow\ & \omega_{\bullet 2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} \times \left(\frac{p_1^*}{p_2^*} \omega_{\bullet 1} + \omega_{\bullet 2} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\boxed{\frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}}}$$

et l'on vérifie que ce prix relatif garantit également l'équilibre sur le marché du bien 1 conformément à la loi de Walras, ce qui donne :

$$\begin{aligned} X_1^d\left(p^*\right) &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} \times \left(\omega_{\bullet 1} + \frac{p_2^*}{p_1^*} \omega_{\bullet 2} \right) \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} \times \left(\omega_{\bullet 1} + \frac{\alpha_2 \omega_{\bullet 1}}{\alpha_1 \omega_{\bullet 2}} \omega_{\bullet 2} \right) \\ &= \omega_{\bullet 1} \end{aligned}$$

Le prix d'équilibre dépend de deux caractéristiques de l'économie. D'une part, les préférences des consommateurs. Plus le bien 1 est préféré au bien 2 (i.e. plus α_1/α_2 est élevé), plus le prix d'équilibre du bien 1, p_1^*, sera élevé par rapport à celui du bien 2, p_2^*. D'autre part, la rareté des biens. Plus le bien 1 sera rare par rapport au bien 2, plus le ratio $\omega_{\bullet 2}/\omega_{\bullet 1}$ sera élevé et plus le prix du bien 1 sera élevé par rapport au prix du bien 2.

Ce prix d'équilibre répond donc à deux principes : toutes choses égales par ailleurs, ce qui est préféré ou rare est cher.

2.1.2 Représentation dans la boîte d'Edgeworth

La boîte d'Edgeworth permet de représenter graphiquement le problème de l'échange entre deux ménages et l'équilibre dans une économie d'échanges.

On considère une économie dans laquelle les ménages peuvent juste échanger leurs dotations initiales. Aucune production n'a lieu pendant la période étudiée. Cette hypothèse sera levée plus tard et n'est introduite que pour des raisons pédagogiques. Elle est un peu moins forte qu'il n'y paraît quand on réalise que le temps de travail fait partie des biens échangeables et que l'on admet donc implicitement que les ménages peuvent travailler les uns pour les autres, ce qui autorise une économie de services.

La représentation synthétique. Pour utiliser la boîte d'Edgeworth, on fait l'hypothèse qu'il y a deux biens et deux ménages. On représente l'allocation du ménage h par le vecteur $x_h = (x_{h1}, x_{h2})$, $h = 1,2$, dans un diagramme d'Edgeworth. Par convention, on représente les quantités du premier ménage sur un premier système d'axe dont l'origine 0_1 est située en bas à gauche du diagramme. Sur ce premier système d'axe, on indique les quantités de bien 1 sur l'axe horizontal et celles de bien 2 sur l'axe vertical ; les quantités demandées du second ménage sont représentées sur un second système d'axe dont l'origine 0_2 est située en haut à droite du diagramme. Les quantités de bien 1 sont également indiquées sur l'axe horizontal, et celles du bien 2 sur l'axe vertical. Les allocations de biens doivent vérifier les deux égalités (comptables) suivantes :

$$x_{1g} + x_{2g} = \omega_{\bullet g}, \; g = 1,2 \tag{2.5}$$

avec

$$\omega_{1g} + \omega_{2g} \triangleq \omega_{\bullet g}, \; g = 1,2 \tag{2.6}$$

Ces égalités signifient que la quantité totale de chaque bien consommée par les ménages, $x_{1g} + x_{2g}$, doit être égale à la quantité offerte $\omega_{\bullet g}$, qui est ici égale à la quantité disponible dans l'économie. Les dotations initiales agrégées $\omega_{\bullet g}$ déterminent donc la longueur des axes de la boîte d'Edgeworth. L'axe (horizontal) du bien 1 est de longueur $\omega_{\bullet 1}$ et celle de l'axe (vertical) du bien 2 est de longueur $\omega_{\bullet 2}$.

L'avantage de la représentation graphique 2.4 est qu'elle permet de représenter les allocations des deux ménages par un même point, noté x. En effet, si on lit les coordonnées du point x par rapport à l'origine 0_1, on obtient (x_{11}, x_{12}) les allocations du ménage 1, et si on lit les coordonnées du même point par rapport à l'origine 0_2, on obtient (x_{21}, x_{22}). En fait comme l'axe du bien 1 est de longueur $\omega_{\bullet 1}$, on peut déduire la demande du ménage 2 de celle du ménage 1 en utilisant $x_{21} = \omega_{\bullet 1} - x_{11}$. Le même raisonnement est valable pour le bien 2.

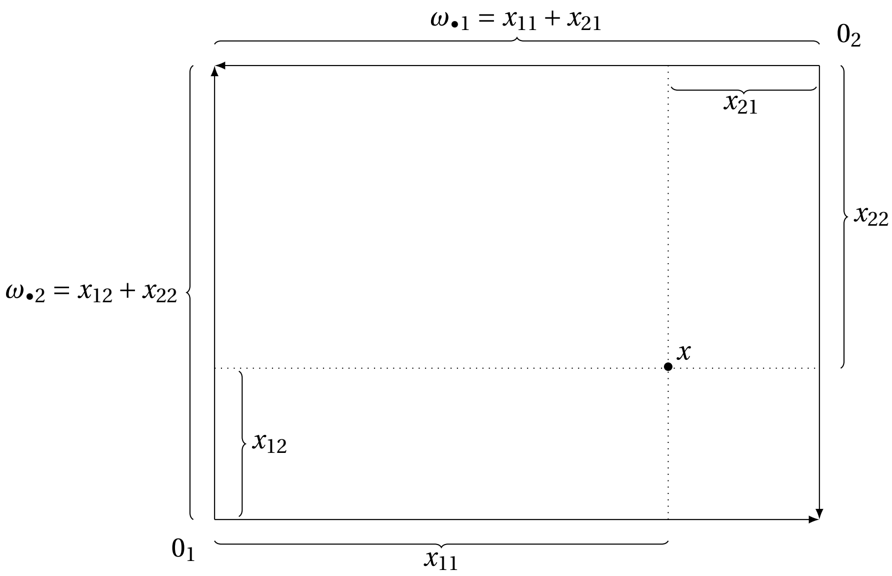
De même que nous avons placé les allocations x sur le diagramme d'Edgeworth, il est possible d'y placer les dotations initiales des agents, et de placer un point ω, qui représentera les dotations initiales des deux agents en même temps, grâce aux deux systèmes d'axes.

La contrainte budgétaire. La contrainte de budget du ménage h est donnée par :

$$p_1 x_{h1} + p_2 x_{h2} = M_h$$

où p_g $(g = 1,2)$ sont les prix des deux biens, M_h est le revenu du ménage h (qui se définit lui-même par rapport aux dotations initiales). La contrainte budgétaire du ménage h s'écrit donc (ordonnée x_{h2} exprimée en fonction de l'abcisse x_{h1}) :

$$x_{h2} = \frac{M_h}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_{h1}.$$



GRAPHIQUE 2.4 – Boîte d'Edgeworth

Les revenus des ménages sont égaux aux valeurs de marché des dotations initiales :

$$M_h = p_1 \omega_{h1} + p_2 \omega_{h2}.$$

Pour le premier ménage, la contrainte budgétaire s'écrit dans le système 0_1 (quantité de bien 2 que le ménage 1 peut acheter en fonction de la quantité de bien 1 qu'il a acheté) :

$$x_{12} = \frac{M_1}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_{11} \tag{2.7}$$

Il s'agit d'une droite décroissante qui coupe l'axe vertical en $x_{11} = 0$ où $x_{12} = M_1 / p_2$. Elle coupe l'axe horizontal quand $x_{12} = 0$ où $x_{11} = M_1 / p_1$. Ces deux points de référence peuvent servir à tracer la droite de budget. Nous allons maintenant montrer que cette droite est confondue avec la droite qui représente la contrainte budgétaire du ménage 2 par rapport au système d'axes 0_2. En utilisant les égalités comptables (2.5), on obtient :

$$x_{12} = \omega_{\bullet 2} - x_{22}, \; x_{11} = \omega_{\bullet 1} - x_{21} \tag{2.8}$$

et en utilisant la définition des revenus :

$$M_1 = p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12}, \; M_2 = p_1 \omega_{21} + p_2 \omega_{22}$$

l'addition des revenus des deux ménages donne :

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= p_1 (\omega_{11} + \omega_{21}) + p_2 (\omega_{12} + \omega_{22}) \\ &= p_1 \omega_{\bullet 1} + p_2 \omega_{\bullet 2}, \end{aligned}$$

en utilisant (2.6). Donc :

$$M_1 = p_1 \omega_{\bullet 1} + p_2 \omega_{\bullet 2} - M_2. \tag{2.9}$$

En reportant (2.8) et (2.9) dans la relation (2.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
\omega_{\bullet 2} - x_{22} &= \frac{p_1\omega_{\bullet 1} + p_2\omega_{\bullet 2} - M_2}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}(\omega_{\bullet 1} - x_{21}) \\
\omega_{\bullet 2} - x_{22} &= \frac{p_1}{p_2}\omega_{\bullet 1} + \omega_{\bullet 2} - \frac{M_2}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\omega_{\bullet 1} + \frac{p_1}{p_2}x_{21} \\
-x_{22} &= -\frac{M_2}{p_2} + \frac{p_1}{p_2}x_{21},
\end{aligned}$$

ce qui se réécrit :

$$x_{22} = \frac{M_2}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_{21},$$

on retrouve la contrainte budgétaire du ménage 2. Ceci implique que les droites budgétaires des deux ménages sont confondues dans la boîte d'Edgeworth.

Propriété 2.1. *La droite de budget passe par le point des dotations initiales ω.*

Intuitivement, la droite de budget doit passer par le point des dotations initiales parce que l'on peut toujours consommer sa dotation initiale. On appelle cette situation *l'autarcie*, que l'on définit en opposition à la situation *d'échange*. Le fait que la droite de budget passe par le point d'autarcie implique que tout échange est *volontaire*, au sens où les ménages n'ont jamais l'obligation d'échanger. Techniquement, il suffit de vérifier la propriété sur un seul ménage parce que les droites budgétaires sont confondues. Supposons que le ménage 1 consomme sa dotation initiale de bien 1, $x_{11} = \omega_{11}$, quelle quantité va t-il consommer de bien 2 ? La réponse est donnée par sa contrainte budgétaire :

$$\begin{aligned}
x_{12} &= \frac{M_1}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\omega_{11} \\
&= \frac{p_1\omega_{11} + p_2\omega_{12}}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\omega_{11} \\
&= \omega_{12},
\end{aligned}$$

donc sa droite budgétaire passe ses dotations initiales $(\omega_{11}, \omega_{12})$, comme l'illustre le graphique 2.5.

Equilibre et optimum. Les ménages maximisent leurs utilités sous contrainte de budget :

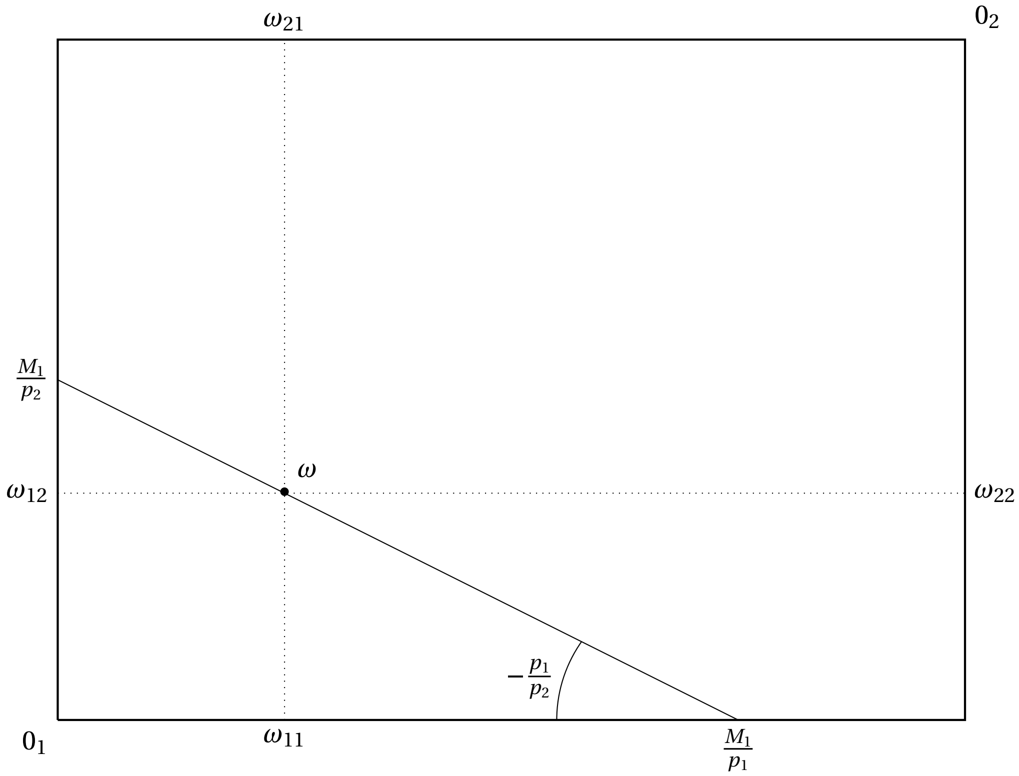
$$\max_{x_h} U_h(x_{h1}, x_{h2}) \text{ sc } p_1 x_{1h} + p_2 x_{2h} \leq M_h$$

La condition du premier ordre se réécrit :

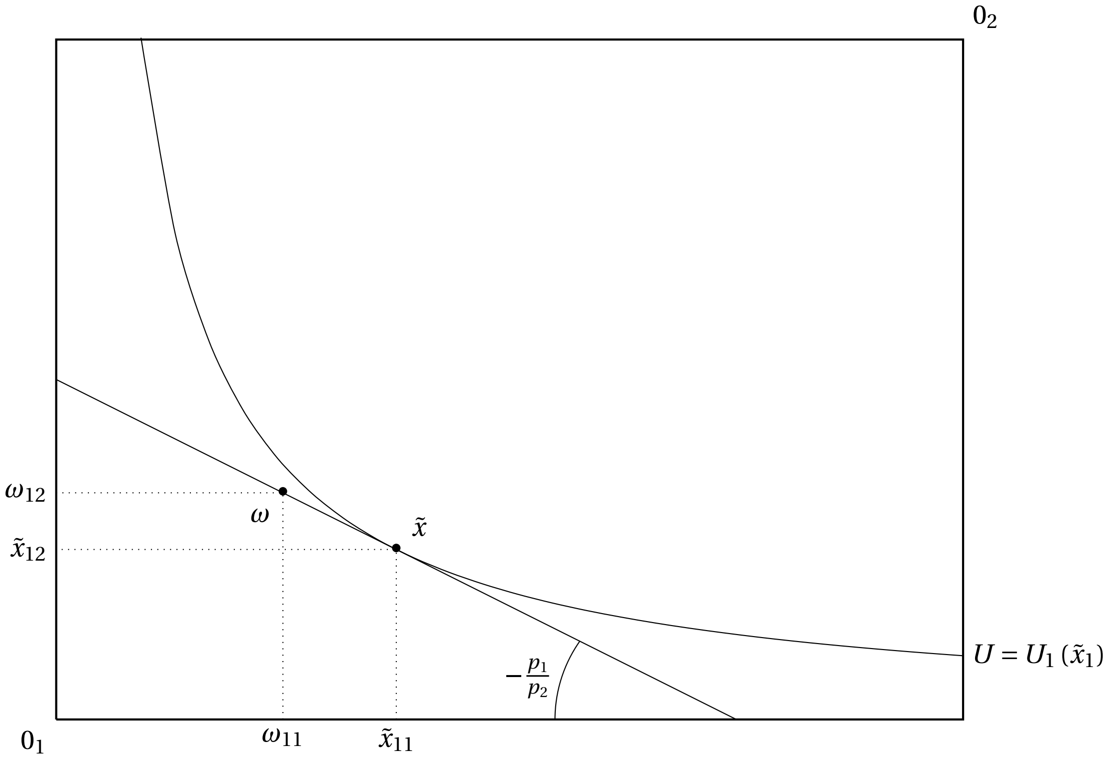
$$\frac{\dfrac{\partial U_h}{\partial x_{h1}}(\widetilde{x}_h)}{\dfrac{\partial U_h}{\partial x_{h2}}(\widetilde{x}_h)} = \frac{p_1}{p_2},$$

le rapport des utilités doit être égal au rapport des prix. La pente de l'isoquante d'utilité au voisinage du maximum est donnée par :

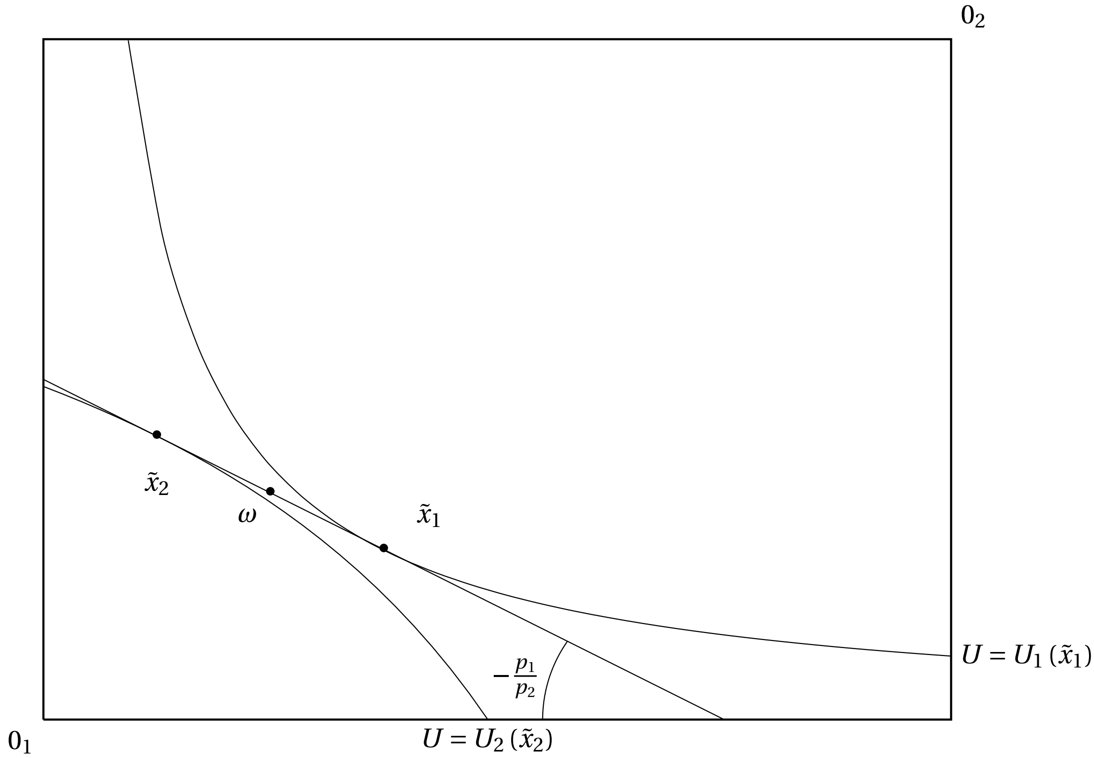
$$\underbrace{dU_h(\widetilde{x})}_{0} = \frac{\partial U_h}{\partial x_{h1}}(\widetilde{x})\,\mathrm{d}x_{h1} + \frac{\partial U_h}{\partial x_{h2}}(\widetilde{x})\,\mathrm{d}x_{h2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x_{h2}}{\mathrm{d}x_{h1}} = -\frac{\dfrac{\partial U_h}{\partial x_{h1}}(\widetilde{x}_h)}{\dfrac{\partial U_h}{\partial x_{h2}}(\widetilde{x}_h)}$$



GRAPHIQUE 2.5 – Boîte d'Edgeworth avec droite commune de budget



GRAPHIQUE 2.6 – Maximisation de l'utilité du ménage 1



GRAPHIQUE 2.7 – Demandes incompatibles pour un vecteur de prix donné

La pente de la droite de budget, dans le système 0_1, est de pente $-p_1/p_2$. Au maximum, la droite de budget est donc tangente à l'isoquante d'utilité $U_h(\tilde{x}_h)$. On représente cette propriété dans la boîte d'Edgeworth 2.6. Dans cet exemple, on voit que le ménage 1 souhaite acheter du bien 1 (car $\tilde{x}_{11} > \omega_{11}$) et vendre du bien 2.

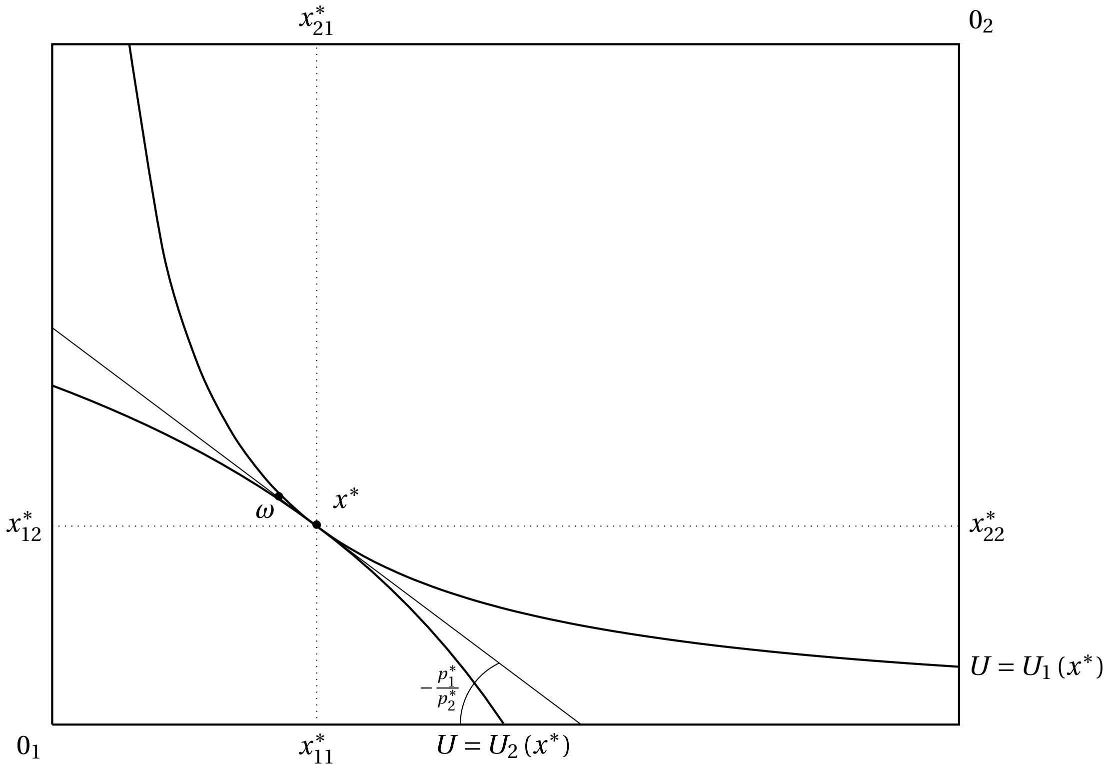
Les quantités $\tilde{x}_h = (\tilde{x}_{h1}, \tilde{x}_{h2})$ sont les fonctions de demande du ménage h. On représente les choix du second ménage de la même manière, mais dans le système d'axes 0_2. Il reste à assurer la compatibilité des demandes des ménages : c'est le rôle des prix de marché.

L'équilibre concurrentiel. Les ménages prennent les prix comme donnés et, pour un vecteur de prix quelconque $p = (p_1, p_2)$, les choix des ménages ne sont pas forcément compatibles comme le montre le graphique 2.7. Il faut un vecteur de prix particulier, appelé *prix d'équilibre*, pour que les plans des ménages soient compatibles entre eux. Ici, on voit que le ménage 1 souhaite consommer plus de bien 1 que sa dotation initiale ainsi que le ménage 2 ; comme l'inverse est vrai pour le bien 2, le prix relatif du bien 1 devrait augmenter par rapport au bien 2, ce qui va également augmenter la pente de la droite de budget p_1/p_2 (en valeur absolue). Cette hausse de pente va rapprocher les points $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$, jusqu'à l'obtention du point d'équilibre, ce que montre le graphique 2.8.

DÉFINITION 2.1. *Une allocation $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ associée à vecteur de prix $p^* = (p_1^*, p_2^*)$, dans un modèle d'échange pur à deux ménages, est un équilibre walrasien ou concurrentiel si elle vérifie :*

$$U_h(x_h^*) \geq U_h(x_h) \;\forall x_h \mid p_1^* x_{h1} + p_2^* x_{h2} \leq p_1^* \omega_{h1} + p_2^* \omega_{h2}$$

Les prix (p_1, p_2) doivent donc s'ajuster pour que les allocations choisies par les ménages coïncident. La modification du vecteur des prix modifie la pente de la droite de budget, et permet de rapprocher les allocations choisies par les ménages. Géométriquement, le pivotement



GRAPHIQUE 2.8 – Allocation d'équilibre : les demandes sont compatibles pour $p = p^*$

de la droite de budget autour du point des dotations initiales ω rend les décisions des agents compatibles entre elles. Une manière simple d'obtenir cet ajustement consiste à égaliser les offres et les demandes. Ces deux concepts sont définis au niveau du marché et doivent donc s'entendre comme l'égalité de l'offre **agrégée** et de la demande **agrégée** de chaque bien ou service. La demande agrégée de bien g est égale à :

$$X_g^d(p) = \tilde{x}_{1g}(p) + \tilde{x}_{2g}(p),$$

et l'offre agrégée de bien g est égale à la somme des dotations initiales :

$$X_g^o(p) = \omega_{1g} + \omega_{2g} = \omega_{\bullet g},$$

elle ne dépend pas du prix dans le cas particulier d'une économie d'échange parce qu'il n'y a pas de production et que, pour cette raison, l'offre est fixée avant les échanges. On cherche donc un vecteur de prix $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{11}(p^*) + \tilde{x}_{21}(p^*) &= \omega_{\bullet 1} \\ \tilde{x}_{12}(p^*) + \tilde{x}_{22}(p^*) &= \omega_{\bullet 2} \end{aligned}$$

Notons dès maintenant que si la première égalité est satisfaite, la seconde le sera forcément. C'est une conséquence de la loi de Walras que nous verrons dans le cas général. Voici un exemple d'équilibre, illustré par le diagramme 2.8. On doit avoir :

$$-\frac{\dfrac{\partial U_1}{\partial x_{11}}(x^*)}{\dfrac{\partial U_1}{\partial x_{12}}(x^*)} = -\frac{p_1^*}{p_2^*} = -\frac{\dfrac{\partial U_2}{\partial x_{21}}(x^*)}{\dfrac{\partial U_2}{\partial x_{22}}(x^*)}$$

Exemple 2.3 (Cobb-Douglas)**.** *Nous avons vu que le prix d'équilibre est donnée par :*

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\omega_{\bullet 1}}{\omega_{\bullet 2}}.$$

Plus généralement, les prix d'équilibre permettent de déterminer les quantités d'équilibre c'est-à-dire les quantités échangées par les ménages. Nous poursuivons maintenant l'exemple de la Cobb-Douglas pour clarifier l'exposé. En reportant l'expression de p_2^*/p_1^* dans les demandes des ménages, on obtient :

$$\begin{aligned}
x_{h1}^* &= x_{h1}^d\left(p^*,\omega_h\right)\\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{p_1^*\omega_{h1}+p_2^*\omega_{h2}}{p_1^*}\\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\omega_{h1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\omega_{\bullet 1}}{\omega_{\bullet 2}}\omega_{h2}\right)\\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\omega_{h1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{\omega_{\bullet 1}}{\omega_{\bullet 2}}\omega_{h2}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
x_{h2}^* &= x_{h2}^d\left(p^*,\omega_h\right)\\
&= \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{p_1^*\omega_{h1}+p_2^*\omega_{h2}}{p_2^*}\\
&= \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}}\omega_{h1}+\omega_{h2}\right)\\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}}\omega_{h1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\omega_{h2}
\end{aligned}$$

Une question intéressante à examiner à partir de ces quantités d'équilibre est la suivante : à quelle condition sort-on de l'autarcie ? Pour répondre à cette question, il faut comparer la quantité consommée (donc d'équilibre) avec échange et sans échange (la dotation initiale) :

$$\begin{aligned}
x_{h1}^*-\omega_{h1} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\omega_{h1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{\omega_{\bullet 1}}{\omega_{\bullet 2}}\omega_{h2}-\omega_{h1}\\
&= \frac{\alpha_2\omega_{h2}}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\frac{\omega_{\bullet 1}}{\omega_{\bullet 2}}-\frac{\omega_{h1}}{\omega_{h2}}\right),
\end{aligned}$$

Cette quantité est positive si $x_{h1}^* > \omega_{h1}$ c'est-à-dire si le ménage h achète du bien 1, négative s'il vend du bien 1, $x_{h1}^* < \omega_{h1}$. Le ménage reste en autarcie quand cette quantité s'annule, car il n'a besoin de faire aucun échange pour maximiser son utilité dans ce cas de figure. La condition d'autarcie est donc :

$$\frac{\omega_{\bullet 1}}{\omega_{\bullet 2}} = \frac{\omega_{h1}}{\omega_{h2}},$$

quand la rareté relative des biens dans les dotations initiales du ménage h est la même que dans l'ensemble de l'économie (donc de l'autre ménage, puisqu'il n'y en a que deux). Il y aura échange dans les deux autres cas. Si la rareté de bien 1 est plus faible pour le ménage h que pour l'ensemble de l'économie on obtient :

$$\frac{\omega_{h1}}{\omega_{h2}} > \frac{\omega_{\bullet 1}}{\omega_{\bullet 2}} \Rightarrow x_{h1}^* < \omega_{h1},$$

et le ménage 1 vend du bien 1. Inversement, si le bien 1 est plus rare pour le ménage h que pour l'ensemble de l'économie, il achètera du bien 1 sur le marché. Globalement, les ménages vendent les biens qu'ils ont en abondance et achètent ceux dont ils manquent.

La base de l'échange dans le modèle de cet exercice est donc une *différence* de dotations initiales. Plus généralement, c'est parce qu'il existe des différences entre les ménages que l'échange est intéressant. Notons ici que la différence de dotations initiales n'est pas la seule source d'échange dans le cas général. Nous aurions pu prendre deux ménages avec des préférences différentes et les mêmes dotations initiales. Dans ce cas, la différence de préférences entre les ménages aurait été la seule source de l'échange. Nous étudierons ce cas en exercice.

L'optimum de Pareto. Nous venons de définir l'équilibre walrasien (également appelé équilibre concurrentiel), nous allons maintenant voir que cet équilibre possède des propriétés d'optimalité.

DÉFINITION 2.2 (Allocation Pareto-optimale). *Une allocation x de la boîte d'Edgeworth est optimale au sens de Pareto (ou Pareto-optimale) s'il n'existe aucune autre allocation x' de cette boîte d'Edgeworth telle que*

$$\begin{aligned} U_h\left(x'_h\right) &\geq U_h\left(x_h\right)\ \forall h = 1,2 \\ et\ \exists h \mid U_h\left(x'_h\right) &> U_h\left(x_h\right) \end{aligned}$$

Une allocation est Pareto-optimale quand il n'existe pas d'autre allocation susceptible d'améliorer l'utilité d'un des deux ménages.

Pour qu'une allocation soit Pareto-optimale, il faut se trouver sur un point de maximisation simultanée des utilités des deux ménages, ce qui implique que leurs courbes d'indifférence doivent être tangentes. L'ensemble de ces points de tangence constitue le plus souvent une courbe, que l'on appelle la *courbe de Pareto*.

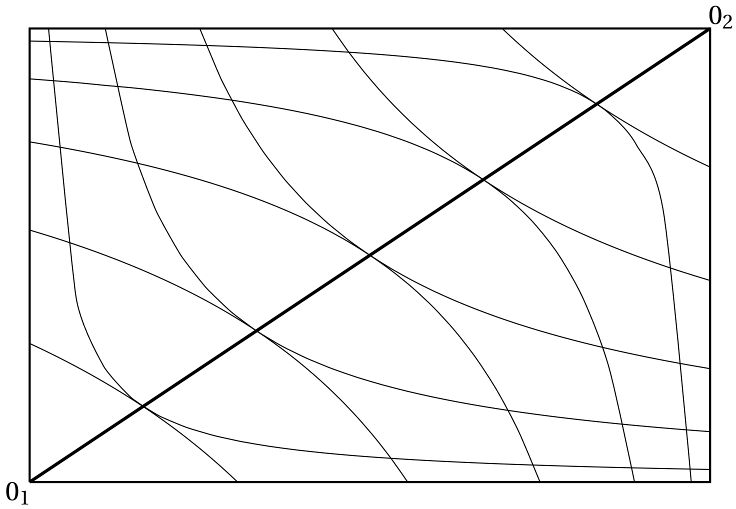
DÉFINITION 2.3 (Courbe de Pareto). *La courbe de Pareto regroupe l'ensemble des allocations optimales au sens de Pareto. Elle est illustrée par le graphique 2.9. On la définit par la condition de tangence des courbes d'indifférence des deux ménages :*

$$\underbrace{\frac{\frac{\partial U_1}{\partial x_{11}}}{\frac{\partial U_1}{\partial x_{12}}}}_{\textit{Ménage 1}} = \underbrace{\frac{\frac{\partial U_2}{\partial x_{21}}}{\frac{\partial U_2}{\partial x_{22}}}}_{\textit{Ménage 2}}$$

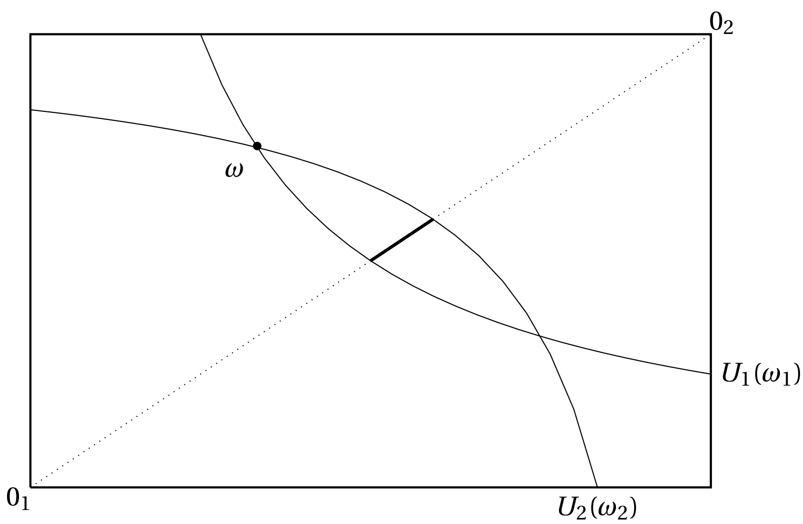
DÉFINITION 2.4 (Courbe des contrats). *La courbe des contrats est la partie de la courbe de Pareto où chaque ménage possède une utilité au moins égale à celle qu'il obtient avec ses dotations initiales. Elle est illustrée par le graphique 2.10. On la définit par la tangence des courbes d'indifférence et une contrainte d'utilité minimale. On a donc :*

$$\frac{\frac{\partial U_1}{\partial x_{11}}}{\frac{\partial U_1}{\partial x_{12}}} = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial x_{21}}}{\frac{\partial U_2}{\partial x_{22}}}\ \ et\ \ U_h\left(x_h\right) \geq U_h\left(\omega_h\right),\ h = 1,2$$

Propriété 2.2. *Toute allocation walrasienne est optimale au sens de Pareto.*



GRAPHIQUE 2.9 – Courbe de Pareto (Cobb-Douglas, préférences communes)



GRAPHIQUE 2.10 – Courbe des contrats (Cobb-Douglas, préférences communes)

Cette propriété vient du fait que, d'une part, les ménages maximisent leur utilité et que, d'autre part, l'équilibre de marché garantit la compatibilité des échanges des ménages. Graphiquement, les prix d'équilibre, en modifiant la pente de la contrainte budgétaire, permettent de choisir une allocation où les deux courbes d'indifférence sont tangentes. Comme les échanges sont volontaires, seuls certains optima de Pareto seront acceptés, ceux qui sont situés sur la courbe des contrats.

Exemple 2.4 (Cobb-Douglas)**.** *Pour tracer la courbe de Pareto, on utilise. Pour le ménage h :*

$$\frac{\frac{\partial U_h}{\partial x_{h1}}}{\frac{\partial U_h}{\partial x_{h2}}} = \frac{\frac{\alpha_1}{x_{h1}}}{\frac{\alpha_2}{x_{h2}}} = \frac{\alpha_1 x_{h2}}{\alpha_2 x_{h1}},\ h = 1,2$$

En égalisant les pentes des deux ménages on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1 x_{12}}{\alpha_2 x_{11}} &= \frac{\alpha_1 x_{22}}{\alpha_2 x_{21}} \\
&\Leftrightarrow \frac{x_{12}}{x_{11}} = \frac{x_{22}}{x_{21}} \\
&\Leftrightarrow \frac{x_{12}}{x_{11}} = \frac{\omega_{\bullet 2} - x_{12}}{\omega_{\bullet 1} - x_{11}} \\
&\Leftrightarrow x_{12} = \frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}} x_{11}
\end{aligned}$$

On obtient une droite reliant les deux origines de la boîte d'Edgeworth, puisque $x_{11} = 0 \Rightarrow x_{12} = 0$ et $x_{11} = \omega_{\bullet 1} \Rightarrow x_{12} = \omega_{\bullet 2}$. Pour la courbe des contrats, on doit ajouter les conditions sur les utilités. Le résultat s'exprime comme un intervalle I_C de valeurs de x_{11} pour lesquelles on se trouve sur la courbe de Pareto. Ainsi, la courbe des contrats est définie par :

$$x_{12} = \frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}} x_{11},\ x_{11} \in I_C$$

On pose $I_C = [a_C, b_C]$. Pour trouver la borne inférieure a_C, on doit ajouter la contrainte :

$$U_1(x_1) = x_{11}^{\alpha_1} x_{12}^{\alpha_2} \geq \omega_{11}^{\alpha_1} \omega_{12}^{\alpha_2} = U_1(\omega_1),$$

en prenant x_{12} sur la courbe de Pareto, $x_{12} = \frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}} x_{11}$, cette contrainte devient :

$$\begin{aligned}
x_{11}^{\alpha_1} \left(\frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}} x_{11}\right)^{\alpha_2} &\geq \omega_{11}^{\alpha_1} \omega_{12}^{\alpha_2} \\
&\Leftrightarrow x_{11}^{\alpha_1+\alpha_2} \geq \left(\frac{\omega_{\bullet 1}}{\omega_{\bullet 2}}\right)^{\alpha_2} \omega_{11}^{\alpha_1} \omega_{12}^{\alpha_2} \\
&\Leftrightarrow x_{11} \geq \left[\left(\frac{\omega_{\bullet 1}}{\omega_{\bullet 2}}\right)^{\alpha_2} \omega_{11}^{\alpha_1} \omega_{12}^{\alpha_2}\right]^{1/(\alpha_1+\alpha_2)} \triangleq a_C,
\end{aligned}$$

Pour obtenir la borne supérieure b_C, on utilise la contrainte du ménage 2 :

$$\begin{aligned}
U_2(x_2) &= x_{21}^{\alpha_1} x_{22}^{\alpha_2} \geq \omega_{21}^{\alpha_1} \omega_{22}^{\alpha_2} = U_2(\omega_2) \\
&\Leftrightarrow (\omega_{\bullet 1} - x_{11})^{\alpha_1} (\omega_{\bullet 2} - x_{12})^{\alpha_2} \geq (\omega_{\bullet 1} - \omega_{11})^{\alpha_1} (\omega_{\bullet 2} - \omega_{12})^{\alpha_2}
\end{aligned}$$

en prenant x_{12} sur la courbe de Pareto, on obtient :

$$\begin{aligned}\omega_{\bullet 2} - x_{12} &= \omega_{\bullet 2} - \frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}} x_{11} \\ &= \frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}} (\omega_{\bullet 1} - x_{11})\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}(\omega_{\bullet 1} - x_{11})^{\alpha_1} (\omega_{\bullet 2} - x_{12})^{\alpha_2} &= (\omega_{\bullet 1} - x_{11})^{\alpha_1} \left[\frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}} (\omega_{\bullet 1} - x_{11})\right]^{\alpha_2} \\ &= \left(\frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}}\right)^{\alpha_2} (\omega_{\bullet 1} - x_{11})^{\alpha_1+\alpha_2},\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}}\right)^{\alpha_2} (\omega_{\bullet 1} - x_{11})^{\alpha_1+\alpha_2} &\geq (\omega_{\bullet 1} - \omega_{11})^{\alpha_1} (\omega_{\bullet 2} - \omega_{12})^{\alpha_2} \\ \omega_{\bullet 1} - x_{11} &\geq \left[\left(\frac{\omega_{\bullet 1}}{\omega_{\bullet 2}}\right)^{\alpha_2} (\omega_{\bullet 1} - \omega_{11})^{\alpha_1} (\omega_{\bullet 2} - \omega_{12})^{\alpha_2}\right]^{1/(\alpha_1+\alpha_2)} \\ -x_{11} &\geq \left[\left(\frac{\omega_{\bullet 1}}{\omega_{\bullet 2}}\right)^{\alpha_2} (\omega_{\bullet 1} - \omega_{11})^{\alpha_1} (\omega_{\bullet 2} - \omega_{12})^{\alpha_2}\right]^{1/(\alpha_1+\alpha_2)} - \omega_{\bullet 1} \\ x_{11} &\leq b_C.\end{aligned}$$

avec :

$$b_C \triangleq \omega_{\bullet 1} - \left[\left(\frac{\omega_{\bullet 1}}{\omega_{\bullet 2}}\right)^{\alpha_2} (\omega_{\bullet 1} - \omega_{11})^{\alpha_1} (\omega_{\bullet 2} - \omega_{12})^{\alpha_2}\right]^{1/(\alpha_1+\alpha_2)}$$

et la courbe des contrats est définie par :

$$x_{12} = \frac{\omega_{\bullet 2}}{\omega_{\bullet 1}} x_{11},\ x_{11} \in [a_C, b_C].$$

2.2 Avec un nombre quelconque de biens et services

2.2.1 Economie d'échanges et équilibre concurrentiel

Dans notre analyse nous considérerons un nombre indéterminé de ménages H. Chaque ménage sera repéré par un indice $h = 1, ..., H$. La notation h que l'on rencontre souvent vient de l'anglais *household*. De même, afin de rester le plus général possible, nous considérerons un nombre indéterminé de biens G, repérés par un indice $g = 1, ..., G$. La force de travail est juste un des G biens disponibles dans l'économie. La notation g que l'on rencontre dans de nombreux ouvrages vient de l'anglais *good*. De ce fait, on peut considérer que tous les ménages ont une dotation initiale non nulle puisqu'ils possèdent une force de travail.

Les quantités de biens que possèdent les ménages sont appelées *dotations initiales*. Chaque ménage possède des dotations initiales, ne serait-ce que son temps de travail. On note ω_h les dotations initiales du ménage h (avec $h = 1, ..., H$). Il s'agit d'un vecteur de dimension G où G est le nombre de biens (et services) que l'on peut échanger sur le marché.

Dans ce premier chapitre, on considère une économie dans laquelle les ménages peuvent juste échanger leurs dotations initiales. Aucune production n'a lieu pendant la période étudiée. Cette hypothèse sera levée plus tard et n'est introduite que pour des raisons pédagogiques. Elle est un peu moins forte qu'il n'y paraît quand on réalise que le temps de travail fait partie des biens échangeables et que l'on admet donc implicitement que les ménages peuvent travailler les uns pour les autres, ce qui autorise une économie de services. La production sera introduite dans le prochain chapitre, en même temps que les entreprises. Dans ce chapitre nous considérerons H ménages et G biens et services. Les quantités de biens et services du ménage h sont notées :

$$\underset{(1,G)}{x_h} = (x_{h1}, \dots, x_{hG}),\ h = 1, \dots, H.$$

où x_{hg} est la quantité de bien g consommée par le ménage h. Le vecteur x_h est donc de dimension G et représente le panier de consommation du ménage h. Une composante de ce panier est nulle si le ménage h ne consomme pas le bien correspondant. Les consommations de l'ensemble des ménages peuvent être rangées dans un vecteur regroupant les vecteurs de consommation de tous les ménages :

$$\underset{(1,G\times H)}{x} = (x_1, \dots, x_H),$$

il est de dimension $G \times H$.

Les dotations initiales du ménage h sont les quantités de bien et de travail que possède le ménage h, elles sont notées :

$$\underset{(1,G)}{\omega_h} = (\omega_{h1}, \dots, \omega_{hG}),\ h = 1, \dots, H$$

et pour l'ensemble de l'économie on a :

$$\underset{(1,G\times H)}{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_H).$$

Une fois qu'un prix d'équilibre aura été déterminé, le ménage h échange les quantités d'équilibre x_h^* regroupées dans un vecteur :

$$\underset{(1,G)}{x_h^*} = \left(x_{h1}^*, \dots, x_{hG}^*\right),\ h = 1, \dots, H,$$

et pour l'ensemble de l'économie, l'allocation d'équilibre est notée :

$$\underset{(1,G\times H)}{x^*} = \left(x_1^*, \dots, x_H^*\right),$$

On peut agréger les quantités disponibles de chaque bien afin de déterminer les offres de biens dans une économie d'échange. On note les quantités agrégées de la manière suivante :

$$\omega_{\bullet g} \triangleq \sum_{h=1}^{H} \omega_{hg}$$

on a donc, par définition :

$$\begin{aligned}\sum_h \omega_h &= \left(\sum_h \omega_{h1}, \dots, \sum_h \omega_{hG}\right) \\ &= (\omega_{\bullet 1}, \dots, \omega_{\bullet G}) \\ &\triangleq \underset{(1,G)}{\omega_\bullet}\end{aligned}$$

Enfin, les prix des G biens sont rangés dans le vecteur :

$$p = (p_1, ..., p_G)$$

et les prix d'équilibre, qui égalisent les demandes et les offres de biens, sont notés :

$$p^* = (p_1^*, ..., p_G^*).$$

La contrainte budgétaire. Les ménages consomment grâce à leur revenu. Dans un modèle dit d'échanges, le revenu provient des dotations initiales. Comme il n'y a pas de production, on exclut le profit. Nous l'ajouterons plus tard quand nous étudierons le comportement des entreprises. Les dotations initiales des ménages sont données, et incluent au moins le temps de travail, de sorte que tous les ménages ont un revenu positif. Le revenu du ménage h est noté M_h et se définit par :

$$M_h = \sum_{g=1}^{G} p_g \omega_{hg} = \langle p, \omega_h \rangle$$

où $p = (p_1, ..., p_G)$ et $\omega_h = (\omega_{h1}, ..., \omega_{hG})$.

On remarque ici que M_h représente le revenu maximum possible car on tient compte de tout le temps dont dispose le ménage, même s'il n'en consacre qu'une partie au travail. C'est une convention importante car elle simplifie la résolution des modèles sans impliquer de perte de généralité. Cette convention est équivalente à la prise en compte explicite des revenus du travail. La dépense du ménage h est notée E_h (pour *expenditure*) définie par :

$$\langle p, x_h \rangle = \sum_{g=1}^{G} p_g x_{hg}$$

où $x_h = (x_{h1}, ..., x_{hG})$ est le vecteur des consommations du ménage h. La dépense est contrainte par le revenu maximum selon la relation :

$$\sum_{g=1}^{G} p_g x_{hg} \quad \leq \quad \sum_{g=1}^{G} p_g \omega_{hg}.$$

Les préférences. Un premier problème que nous allons devoir résoudre est celui des choix des ménages. Pour résoudre ce problème, il faut un critère résumant les préférences des ménages en matière de consommation et de loisir. Nous allons donc supposer que les ménages savent évaluer la satisfaction d'un panier de biens et services x_h, et savent comparer les satisfactions données par différents paniers, d'une manière rationnelle. On supposera ici que les préférences des ménages sont résumées par une fonction d'utilité $U_h(x_h)$. On supposera également que les ménages recherchent la plus grande satisfaction possible, compte-tenu de la contrainte budgétaire qui s'impose à eux.

La représentation sous forme de fonction d'utilité d'une relation de préférence n'est pas unique car toute transformation strictement croissante de $U_h(x_h)$ est une fonction d'utilité représentative de la même relation de préférence. Soit une fonction monotone croissante f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et une autre fonction $g_h(x) = f(U_h(x))$, on a :

$$U_h(x_{h1}) \geq U_h(x_{h2}) \Leftrightarrow f(U_h(x_{h1})) \geq f(U_h(x_{h2})) \Leftrightarrow g_h(x_{h1}) \geq g_h(x_{h2}),$$

donc $g_h(.)$ est également une fonction d'utilité associée à la même relation de préférence que $U_h(.)$. Intuitivement, ceci signifie que seul l'ordre dans lequel on classe les paniers de bien compte, pas l'importance des écarts de préférence entre ces paniers. Cette propriété est très utile car elle peut simplifier les calculs. On utilise souvent la transformation logarithmique pour simplifier les fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas.

Exemple 2.5 (Cobb-Douglas)**.** *La fonction d'utilité est donnée par :*

$$U_h(x_h) = \prod_{g=1}^{G} x_{hg}^{\alpha_g},$$

on préférera utiliser :

$$g_h(x_h) = \ln U_h(x_h) = \sum_{g=1}^{G} \alpha_g \ln\left(x_{hg}\right),$$

qui est plus simple à utiliser. Les coefficients α_g sont les élasticités de l'utilité aux quantités de biens et services consommés. Une hausse de la quantité consommée du bien g de 1% augmente l'utilité de α_g%. Si un bien g a une élasticité plus importante qu'un bien j, les variartions des quantités consommées du bien g seront plus fortement prises en compte par le ménage que celles du bien j. L'élasticité mesure donc l'importance du bien dans les préférences du ménage. La quantité $a_j = \alpha_j / \sum_g \alpha_g$ s'interprète comme l'importance du bien j dans les préférences du ménage h. On ajoute parfois la contrainte $\sum_g \alpha_g = 1$ car ce sont les préférences relatives qui comptent.

Pour pouvoir prévoir les décisions économiques des ménages, il nous faut fixer un critère de choix. On suppose que les ménages cherchent à obtenir la plus grande satisfaction possible. Une forme simplifiée de cette approche consiste à maximiser une fonction d'utilité. On peut justifier cette approche en constatant que dans une économie de marché, on peut difficilement faire l'hypothèse que les ménages agissent contre leurs intérêts, représentés par une fonction d'utilité. C'est une hypothèse simplificatrice, mais de bon sens.

Les demandes walrasiennes. Les ménages maximisent leur utilité sous contrainte de budget. On en déduit une fonction qui associe une consommation *optimale* à chaque couple de prix et de revenu ; on la note $\widetilde{x}_h\left(p, M_h\right)$. Si la fonction d'utilité est concave, on obtient une valeur unique.

DÉFINITION 2.5. *La demande walrasienne est la fonction de demande obtenue en maximisant l'utilité sous contrainte budgétaire*

$$\widetilde{x}_h\left(p, M_h\right) = \arg\max_{x_{hg} \geq 0} U_h(x) \text{ s.c. } \langle p, x\rangle \leq M_h$$

La dénomination fait suite aux travaux de Léon Walras (1834-1910).

Propriété 2.3. *Les demandes walrasiennes sont homogènes de degré zéro en $\left(p, M_h\right)$:*

$$\forall \mu > 0,\ \forall \left(p, M_h\right) : \widetilde{x}_h\left(p, M_h\right) = \widetilde{x}_h\left(\mu p, \mu M_h\right)$$

Cette propriété vient de la définition de la contrainte budgétaire. On a : $\langle p, x\rangle \leq M_h \Leftrightarrow \mu \times \langle p, x\rangle \leq \mu \times M_h, \forall \mu > 0$. Comme on maximise l'utilité sur le même ensemble, on doit obtenir les mêmes demandes, d'où $\widetilde{x}_h\left(p, M_h\right) = \widetilde{x}_h\left(\mu p, \mu M_h\right)$. Cette propriété ne dépend pas de la fonction d'utilité choisie.

On peut interpréter l'homogénéité de degré zéro comme le fait que seuls les prix relatifs et le revenu réel comptent. Soit G un bien, de prix p_G, qui servirait de référence. En posant $\mu = 1/p_G$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_h(p, M_h) &= x_h\left(\frac{p}{p_G}, \frac{M_h}{p_G}\right) \\ &= x_h\left(\frac{p_1}{p_G}, \ldots, \frac{p_{G-1}}{p_G}, 1, \frac{M_h}{p_G}\right) \end{aligned}$$

La demande ne dépend que des prix relatifs p_g/p_G et du revenu réel M_h/p_G. Si $p_G = 1$, le bien est appelé numéraire ou monnaie. Remarquons ici qu'un prix p_g se définit comme le nombre d'unités monétaires qu'il faut pour acheter le bien g, le prix de la monnaie est donc égal à 1.

Le Taux marginal de substitution (TMS). Pour interpréter l'optimisation comme pour résoudre certains modèles plus rapidement, il est utile de définir le TMS. Pour trouver les demandes walrasiennes, on utilise souvent le Lagrangien :

$$\mathscr{L}_h(x_h) = U_h(x_h) - \lambda_h\left(\langle p, x_h\rangle - M_h\right)$$

S'il existe une solution intérieure $\tilde{x}_h$, elle vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_h}{\partial x_{hb}}(\tilde{x}_h) - \lambda_h p_b &= 0,\ b = 1, \ldots, G \\ \lambda_h \times \left(\langle p, \tilde{x}_h\rangle - M_h\right) &= 0,\ \lambda_h \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que pour deux biens g et b :

$$\lambda_h > 0 \Rightarrow \frac{\partial U_h(\tilde{x}_h)/\partial x_g}{\partial U_h(\tilde{x}_h)/\partial x_b} = \frac{p_g}{p_b}$$

La quantité

$$\mathrm{TMS}_{gb}(\tilde{x}_h) = \frac{\partial U_h(\tilde{x}_h)/\partial x_g}{\partial U_h(\tilde{x}_h)/\partial x_b}$$

est le *taux marginal de substitution* du bien g en bien b au point $\tilde{x}_h$. Il représente le nombre d'unités du bien b que le ménage h doit recevoir pour compenser la perte d'une unité de bien g. On peut le voir en calculant la différentielle de la fonction d'utilité en un point quelconque x_h (à utilité constante) :

$$\underbrace{\mathrm{d}U_h(x_h)}_{0} = \frac{\partial U_h(x_h)}{\partial x_{hg}}\mathrm{d}x_{hg} + \frac{\partial U_h(x_h)}{\partial x_{hb}}\mathrm{d}x_{hb} \Leftrightarrow \mathrm{d}x_{hb} = \mathrm{TMS}_{gb}(x_h)\left(-\mathrm{d}x_{hg}\right)$$

***Remarque* 2.1.** *Si le ménage perd une unité de bien g, on a $dx_{hg} = -1$ et donc $dx_{hb} = TMS_{gb}(x_h)$ représente le nombre d'unités de bien b qu'il faut pour compenser cette perte de bien g.*

***Remarque* 2.2.** *Le rapport des prix p_g/p_b représente le nombre d'unités de bien b qu'il faut acheter pour compenser la vente d'une unité de bien g.*

Exemple 2.6. *$p_g = 1$ et $p_b = 2$. Il faut acheter $p_g/p_b = 1/2$ unité de bien b pour compenser la vente d'une unité de bien g.*

Propriété 2.4. *L'utilité ne peut être maximale que si*

$$TMS_{gb}(x_h) = \frac{p_g}{p_b}$$

Si $\text{TMS}_{gb}(x_h) > p_g/p_b$: le bien g est plus fortement valorisé (en termes relatifs) par le ménage que par le marché. Il peut augmenter son utilité en augmentant sa consommation de bien g et en réduisant sa consommation de bien b. Inversement, si $\text{TMS}_{gb}(x_h) < p_g/p_b$: le bien b est plus fortement valorisé par le ménage que par le marché. Il peut augmenter son utilité en augmentant sa consommation de bien b et en réduisant sa consommation de bien g.

On peut reformuler la condition de maximisation de l'utilité de la manière suivante :

$$\frac{\partial U_h(\widetilde{x}_h)}{\partial x_{hg}}\frac{1}{p_g} = \frac{\partial U_h(\widetilde{x}_h)}{\partial x_{hb}}\frac{1}{p_b}, \ \forall (g,b).$$

La quantité $\partial U_h(\widetilde{x}_h)/\partial x_{hg}$ représente le gain associé à la consommation d'une unité supplémentaire de bien g et p_g ce que coûte cette consommation. Au maximum d'utilité, les ratios "bénéfices-coûts" sont identiques pour tous les biens : tous les arbitrages ont été faits entre les différentes consommations possibles.

La demande agrégée. Pour trouver un équilibre de marché, nous aurons besoin de la demande agrégée pour un bien g, d'où la définition suivante.

DÉFINITION 2.6. *La demande agrégée de bien g est la demande de bien g adressée au marché par l'ensemble des ménages :*

$$X_g^d(p) = \sum_{h=1}^{H} x_{hg}^d(p,\omega_h), \ g = 1,\ldots,G$$

on ne note pas toujours explicitement la dépendance de la demande agrégée aux dotations initiales car elles ne sont pas déterminées par le modèle. On peut également la noter sous forme vectorielle :

$$\underset{(1,G)}{X^d}(p) = \left(X_1^d(p),\cdots,X_G^d(p)\right)$$

Ce sont ces fonctions de demandes que l'on utilise pour déterminer le prix d'équilibre ou prix de marché.

L'équilibre concurrentiel. Les H ménages échangent leur dotations initiales sur les G marchés. On suppose que ces échanges se font selon un vecteur de prix que l'on appelle prix d'équilibre. Ce vecteur de prix est défini par l'égalité de la demande agrégée et de l'offre agrégée sur tous les marchés simultanément. Dans un premier temps, nous montrons qu'il n'est nécessaire que d'étudier $G-1$ marchés. Nous verrons ensuite la méthode générale de résolution du problème.

Propriété 2.5 (Loi de Walras). *Dans une économie d'échange, si* $G-1$ *marchés sont à l'équilibre, le* G*-ième marché est à l'équilibre.*

C'est une conséquence des contraintes budgétaires des ménages. La contrainte budgétaire globale, également valable en dehors de l'équilibre, est donnée par :

$$\begin{aligned}
\sum_{g=1}^{G} p_g \widetilde{x}_{hg} &= \sum_{g=1}^{G} p_g \omega_{hg}, \; \forall g \\
&\Rightarrow \sum_{h=1}^{H} \sum_{g=1}^{G} p_g \left(\widetilde{x}_{hg} - \omega_{hg}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{g=1}^{G} \sum_{h=1}^{H} p_g \left(\widetilde{x}_{hg} - \omega_{hg}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{g=1}^{G} p_g \sum_{h=1}^{H} \left(\widetilde{x}_{hg} - \omega_{hg}\right) = 0
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que les $G-1$ premiers marchés sont en équilibre, on doit avoir :

$$\sum_{h=1}^{H} \left(\widetilde{x}_{hg} - \omega_{hg}\right) = 0, \forall\, g = 1, \ldots, G-1$$

ce qui implique :

$$p_G \sum_{h=1}^{H} (\widetilde{x}_{hG} - \omega_{hG}) = 0 \Rightarrow \sum_{h=1}^{H} (\widetilde{x}_{hG} - \omega_{hG}) = 0, \; \forall p_G > 0,$$

pour tout prix p_G positif, le G-ième marché est toujours à l'équilibre.

Cette propriété est pratique pour deux raisons : d'une part, quand il y a deux marchés, on n'a besoin d'en étudier qu'un seul et, d'autre part, quand il y a $G \geq 2$ marchés, on est libre de choisir le sous ensemble de $G-1$ marchés que l'on veut.

Le prix d'équilibre. Après avoir défini le concept de prix d'équilibre, nous présenterons la méthode générale de résolution. Nous prendrons ensuite l'exemple de préférences de type Cobb-Douglas.

DÉFINITION 2.7 (prix d'équilibre). *Le vecteur de prix d'équilibre p^* est le vecteur de prix qui égalise les offres agrégées aux demandes agrégées sur tous les marchés :*

$$p^* \mid X_g^d\left(p^*\right) = X_g^o\left(p^*\right), \; g = 1, \ldots, G$$

soit, dans une économie d'échanges,

$$p^* \mid \sum_{h=1}^{H} x_{hg}^d\left(p^*, \omega_h\right) = \sum_{h=1}^{H} \omega_{hg}, \; g = 1, \ldots, G,$$

ou, avec d'autres notations :

$$p^* \mid \sum_{h=1}^{H} x_{hg}^d\left(p^*, \omega_h\right) = \omega_{\bullet g}, \; g = 1, \ldots, G,$$

ce vecteur de prix d'équilibre rend les plans des agents compatibles entre eux, c'est-à-dire avec les ressources de l'économie.

***Remarque* 2.3.** *La fonction de demande agrégée de bien g s'écrit :*

$$X_g^d(p) = \sum_{h=1}^{H} x_{hg}^d(p, \omega_h).$$

***Remarque* 2.4.** *Dans une économie d'échange la fonction d'offre agrégée est égale aux dotations initiales de l'économie, de sorte que l'on peut poser :*

$$X_g^o(p) = \omega_{\bullet g},$$

elle ne dépend pas des prix parce qu'il n'y a pas de production.

***Remarque* 2.5.** *On peut donc définir le prix d'équilibre de la manière suivante :*

$$p^* \mid X_g^d(p^*) = X_g^o(p^*), \; g = 1, ..., G$$

La première étape de la résolution consiste à trouver les demandes walrasiennes. On considère ici le cas général, avec H ménages et G biens. Les ménages maximisent leurs utilités sous contraintes budgétaires. On peut résoudre ce problème à partir du lagrangien :

$$\mathscr{L}_h(x_h) = U_h(x_{h1}, ..., x_{hG}) - \lambda_h(p \cdot x_h - p \cdot \omega_h)$$

Les conditions du premier ordre deviennent ($\lambda_h > 0$) :

$$\frac{\dfrac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{hg}}}{\dfrac{\partial U_h(\tilde{x}_h)}{\partial x_{hb}}} = \frac{p_g}{p_b} \; \forall g, b \in G$$

et les demandes walrasiennes vérifient la contrainte budgétaire :

$$\langle p, \tilde{x}_h \rangle = \langle p, \omega_h \rangle$$

Ceci permet d'obtenir les fonctions de demande individuelle des H ménages pour les G biens :

$$x_{hg}^d(p, \omega_h), \; h \in H, \; g \in G,$$

on en déduit les G demandes agrégées :

$$X_g^d(p) = \sum_{h=1}^{H} x_{hg}^d(p, \omega_h), g \in G.$$

D'autre part, les G offres agrégées sont données directement par :

$$X_g^o(p) = \sum_{h=1}^{H} \omega_{hg} = \omega_{\bullet g}, \; g \in G.$$

de sorte que le vecteur de prix d'équilibre p^* est défini par :

$$\begin{aligned} p^* \mid X_g^d(p^*) &= X_g^o(p^*) \\ &\Leftrightarrow \sum_{h=1}^{H} x_{hg}^d(p, \omega_h) = \omega_{\bullet g}, \; g \in G. \end{aligned}$$

Parvenu à ce point, il faut bien examiner le système d'équations obtenu afin de déterminer la manière la plus simple de le résoudre. Les simplifications viennent souvent de dotations initiales nulles pour certains ménages. Plus précisément, on utilise la loi de Walras, afin de déterminer le système le plus simple de dimension $G-1$. Sa résolution donne un système de $G-1$ prix relatifs d'équilibre. Par exemple, si on prend le bien G comme numéraire, on obtient :

$$\frac{p_1^*}{p_G^*}, \ldots, \frac{p_{G-1}^*}{P_G^*}.$$

Dans la pratique, on fixe un numéraire *avant* de commencer la résolution. Tous les prix que l'on obtient sont alors implicitement définis par rapport à ce numéraire (d'après la loi de Walras). Dans l'exemple ci-dessus, on fixerait $p_G^* = 1$ avant la résolution et l'on chercherait directement le vecteur :

$$\left(p_1^*, \ldots, p_{G-1}^*\right)$$

sachant que ce vecteur contient en fait $p_1^* / p_G^*, \ldots, p_{G-1}^* / p_G$.

2.2.2 Equilibre concurrentiel et diversité des dotations initiales

Les traitements précédents illustrent l'influence les différences de dotations initiales entre les ménages et les différences de préférences entre les ménages. Nous prendrons des préférences de type Cobb-Douglas afin d'obtenir des solutions explicites. Dans cette section, les ménages ont les mêmes préférences et des dotations différentes. Ce choix d'hypothèse nous permettra d'isoler l'influence des dotations initiales sur l'équilibre.

On considère une économie avec H ménages et G biens et services. Leurs dotations initiales sont données par :

$$x_h = (x_{h1}, \ldots, x_{hG}), \ h = 1, \ldots, H$$

et les ménages ont tous des préférences identiques. On fait cette hypothèse en imposant que les coefficients de la fonction d'utilité sont les mêmes pour tous les ménages. Tous les exemples que nous avons donné jusqu'à maintenant faisaient cette hypothèse avec $H = 2$ ménages et $G = 2$ biens. La généralisation de cette section porte donc sur les nombres de ménages et de biens. La fonction d'utilité du ménage h est donnée par :

$$U_h = \sum_g \alpha_g \ln\left(x_{hg}\right)$$

et sa contrainte budgétaire est donnée par :

$$\sum_g p_g x_{hg} \le M_h \Leftrightarrow \sum_g p_g x_{hg} - M_h \le 0$$

le lagrangien est donc égal à :

$$\mathscr{L}_h(x_h) = \sum_g \alpha_g \ln\left(x_{hg}\right) - \lambda_h \left(\sum_g p_g x_{hg} - M_h\right),$$

on en déduit les conditions du premier ordre : [1]

$$\frac{\partial \mathscr{L}_h}{\partial x_{hb}} = \frac{\alpha_b}{\widetilde{x}_{hb}} - \lambda_h p_b = 0 \tag{2.10}$$
$$\lambda_h \left(\sum_g p_g \widetilde{x}_{hg} - M_h \right) = 0,\ \lambda_h \geq 0$$

étant donné qu'au maximum d'utilité, on doit avoir $\widetilde{x}_{hb} > 0$ et que $\alpha_b > 0$, $p_b > 0$. Les conditions du premier ordre peuvent s'écrire :

$$p_b \widetilde{x}_{hb} = \frac{\alpha_b}{\lambda_h} \Leftrightarrow p_g \widetilde{x}_{hg} = \frac{\alpha_g}{\lambda_h}$$

en reportant la condition du premier ordre dans la contrainte budgétaire, on obtient (2.10) :

$$\sum_g p_g \widetilde{x}_{hg} = \frac{1}{\lambda_h} \sum_g \alpha_g, \tag{2.11}$$

on a également :

$$\lambda_h > 0 \Rightarrow \sum_g p_g \widetilde{x}_{hg} = M_h$$

en utilisant la contrainte budgétaire au maximum, on obtient :

$$\frac{1}{\lambda_h} \sum_g \alpha_g = M_h$$

d'où :

$$\frac{1}{\lambda_h} = \frac{M_h}{\sum_g \alpha_g}$$

que l'on peut reporter dans (2.11) pour obtenir la demande walrasienne :

$$\widetilde{x}_{hb} = \frac{\alpha_b}{\lambda_h p_b} = \frac{\alpha_b}{\sum_g \alpha_g} \frac{M_h}{p_b}$$

Arrivé à ce stade, on pose la notation :

$$a_b \triangleq \frac{\alpha_b}{\sum_g \alpha_g},\ b \in G$$

le coefficient a_j représente la préférence relative des ménages pour le bien j. Il vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} a_b &> 0 \text{ (car } \alpha_b > 0) \\ \text{et } \sum_{b=1}^{G} a_b &= \frac{\sum_b \alpha_b}{\sum_g \alpha_g} = 1. \end{aligned}$$

1. Il suffit de remarquer que :

$$\sum_g \alpha_{hg} \ln \left(x_{hg} \right) = \alpha_{hj} \ln \left(x_{hj} \right) + \sum_{g \neq j} \alpha_{hg} \ln \left(x_{hg} \right)$$

et que :

$$\sum_g p_g x_{hg} = p_j x_{hj} + \sum_{g \neq j} p_g x_{hg}.$$

Avec cette convention, la demande walrasienne se réécrit :

$$\widetilde{x}_{hb} = a_b \frac{M_h}{p_b},$$

elle s'accroît avec la préférence relative pour le bien b (mesurée par a_b) et avec le revenu réel (ou pouvoir d'achat) du ménage h mesuré en unités de bien b. La fonction de demande que l'on utilise pour calculer la demande agrégée est obtenue en remplaçant le revenu par son expression en fonction des prix. Pour le ménage h, on obtient la valeur des dotations initiales :

$$M_h = \sum_b p_b \omega_{hb},$$

ce qui donne finalement :

$$x^d_{hg}(p, \omega_h) = a_g \times \frac{1}{p_g} \sum_b p_b \omega_{hb}.$$

On remarque que l'expression de la demande ne dépend que des prix relatifs p_b/p_g. L'équilibre de marché se calcule à partir de la demande agrégée, on additionne donc les demandes de tous les ménages :

$$\begin{aligned} X^d_g(p, \omega) &= \sum_h x^d_{hg}(p, \omega_h) \\ &= \sum_h \left\{ a_g \times \frac{1}{p_g} \sum_b p_b \omega_{hb} \right\} \end{aligned}$$

et dans la somme, seul le terme des dotations initiales ω_{hb} dépend de h, on peut simplifier l'expression de la manière suivante :

$$X^d_g(p) = a_g \times \frac{1}{p_g} \sum_b p_b \left(\sum_h \omega_{hb} \right)$$

et, arrivé à ce stade, on remarque que :

$$\sum_h \omega_{hb} = \omega_{\bullet b},$$

d'où l'expression de la demande agrégée :

$$X^d_g(p) = a_g \times \frac{1}{p_g} \sum_b p_b \omega_{\bullet b},$$

et l'offre agrégée de bien g est simplement donnée par $\omega_{\bullet g}$, donc les prix d'équilibre vérifient les relations :

$$X^d_g(p^*) = \omega_{\bullet g}, \ \ g \in G$$

On en déduit la condition d'équilibre de cette économie :

$$a_g \times \frac{1}{p^*_g} \sum_b p^*_b \omega_{\bullet b} = \omega_{\bullet g}, \ g \in G$$

cette relation est vraie en particulier pour le numéraire de cette économie. Par convention, nous lui donnons toujours l'indice le plus élevé, soit G. La condition d'équilibre sur le marché du numéraire est donnée par :

$$a_G \times \frac{1}{p^*_G} \sum_b p^*_b \omega_{\bullet b} = \omega_{\bullet G},$$

en faisant le ratio de cette équation par l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{a_G \times \frac{1}{p_G^*} \sum_b p_b^* \omega_{\bullet b}}{a_g \times \frac{1}{p_g^*} \sum_b p_b^* \omega_{\bullet b}} = \frac{\omega_{\bullet G}}{\omega_{\bullet g}} \Leftrightarrow \frac{a_G}{a_g} \frac{p_g^*}{p_G^*} = \frac{\omega_{\bullet G}}{\omega_{\bullet g}},$$

d'où les prix relatifs d'équilibre :

$$\frac{p_g^*}{p_G^*} = \frac{a_g}{a_G} \frac{\omega_{\bullet G}}{\omega_{\bullet g}}$$

dans la pratique, on pose toujours $p_G^* = 1$, car le bien G est le numéraire, donc :

$$p_g^* = \frac{a_g}{a_G} \frac{\omega_{\bullet G}}{\omega_{\bullet g}}, \; g = 1, \ldots, G$$

le prix d'équilibre est d'autant plus élevé qu'il est apprécié par l'ensemble des ménages (a_g élevé) et qu'il est rare dans l'économie ($\omega_{\bullet g}$ faible). On peut également comparer deux biens quelconques b et g :

$$\boxed{\frac{p_b^*}{p_g^*} = \frac{a_b}{a_g} \frac{\omega_{\bullet g}}{\omega_{\bullet b}}}$$

le premier résultat est que le numéraire (la monnaie) disparaît de l'expression du prix relatif. La monnaie n'est qu'un voile, elle est néanmoins importante parce qu'elle permet des échanges qui restent réels. Le prix relatif du bien b par rapport au bien g est d'autant plus élevé que l'ensemble des ménages préfère le bien b au bien g (ratio a_b/a_g élevé) et que le bien g est abondant par rapport au bien b (ratio $\omega_{\bullet g}/\omega_{\bullet b}$ élevé).

Nous pouvons maintenant étudier à quelle condition les ménages échangent. Pour cela, il faut comparer les quantités échangées à l'équilibre aux dotations initiales des ménages. Si ces deux quantités sont égales, aucun échange n'a lieu. Si la dotation initiale est supérieure à la quantité d'équilibre, le ménage vend, si la dotation initiale est inférieure à la quantité d'équilibre, le ménage achète. Les quantités d'équilibre se trouvent en appliquant les prix d'équilibres aux demandes des ménages. Pour le ménage h, on obtient :

$$\begin{aligned}
x_{hg}^* &= x_{hg}^d (p^*, \omega_h) \\
&= a_g \times \frac{1}{p_g^*} \sum_b p_b^* \omega_{hb} \\
&= a_g \sum_b \frac{p_b^*}{p_g^*} \omega_{hb} \\
&= a_g \sum_b \frac{a_b}{a_g} \frac{\omega_{\bullet g}}{\omega_{\bullet b}} \omega_{hb} \\
&= \omega_{\bullet g} \times \sum_b a_b \frac{\omega_{hb}}{\omega_{\bullet b}} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{x_{hg}^*}{\omega_{\bullet g}} &= \sum_b a_b \frac{\omega_{hb}}{\omega_{\bullet b}}
\end{aligned}$$

la demande en bien g du ménage h peut s'écrire sous la forme d'un ratio. Le terme $x_{hg}^*/\omega_{\bullet g}$ est la part du bien g qui reviendra au ménage h dans cette économie après l'échange (c'est-à-dire la part de la ressource g qu'il consommera). Le membre de droite porte sur les revenus. La quantité $\omega_{hb}/\omega_{\bullet b}$ représente la part de bien b que le ménage possède dans l'économie avant l'échange. Plus cette part est élevée, plus le ménage aura un revenu élevé et plus il pourra consommer de bien g. La pondération a_b (donc la somme est égale à 1), qui apparaît devant ce terme, traduit simplement le fait que plus le bien b est apprécié, plus le ménage sera riche parce que le prix de marché de ce bien sera plus élevé. Dans ce modèle simplifié, on remarque également que la part consommée à l'équilibre $\omega^*_{hg}/\omega_{\bullet g}$ *est la même pour tous les biens* car le membre de droite ne dépend pas de g. Les prix d'équilibre ont compensé les différences de préférence entre les biens, de sorte que les différences de consommation entre les ménages ne n'expliquent, à l'équilibre que par les différences de revenus.

Pour déterminer l'intensité des échanges, on calcule l'écart entre la part du bien g que le ménage h consomme à l'équilibre et celle qu'il serait obligé de consommer en autarcie. Cette dernière part est égale à $\omega_{hg}/\omega_{\bullet g}$, on doit donc calculer la différence :

$$\frac{x^*_{hg}}{\omega_{\bullet g}} - \frac{\omega_{hg}}{\omega_{\bullet g}} = \sum_b a_b \frac{\omega_{hb}}{\omega_{\bullet b}} - \frac{\omega_{hg}}{\omega_{\bullet g}}, \tag{2.12}$$

si cette quantité est positive, le ménage doit acheter du bien g, si elle est négative le ménage doit vendre du bien g. Intuitivement, nous devrions trouver que des ménages dont les préférences sont identiques n'ont pas d'intérêt à l'échange quand ils ont les mêmes dotations initiales. Cette condition est réalisée quand tous les ménages ont les mêmes dotations soit $\omega_{hg} = \omega_{\bullet g}/H$. Dans ce cas, $\omega_{hg}/\omega_{\bullet g} = 1/H$. En remplaçant ω_{hg} par cette valeur dans la relation précédente, on trouve que :

$$\begin{aligned} \frac{x^*_{hg}}{\omega_{\bullet g}} - \frac{\omega_{hg}}{\omega_{\bullet g}} &= \sum_b a_b \frac{1}{H} - \frac{1}{H} \\ &= H\left(\sum_b a_b - 1\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc les échanges viennent bien des différences de dotations initiales entre les ménages. La raison de cette propriété vient du fait que les ménages qui possèdent différentes dotations initiales ont des utilités marginales différentes en autarcie parce qu'ils ont les mêmes préférences. Les ménages qui ont beaucoup d'un bien ont une faible utilité marginale pour ce bien, alors que les ménages qui en ont peu ont une utilité marginale élevée pour ce même bien. Ceci crée une incitation à l'échange entre les ménages, où chacun échange les biens les plus abondants de son point de vue contre des biens qu'il considère comme les plus rares (par rapport à ses dotations initiales).

2.2.3 Equilibre concurrentiel et diversité des préférences

Dans cette section, les ménages ont des préférences différentes et des dotations identiques, ce qui nous permettra d'isoler l'influence des préférences sur l'équilibre. Les échanges qui auront lieu à l'équilibre traduiront donc des différences de préférences entre les ménages. Les préférences du ménage h sont données par :

$$U_h(x) = \sum_g \alpha_{hg} \ln\left(x_{hg}\right),$$

et la contrainte de budget s'écrit comme dans le cas précédent :

$$\sum_g p_h x_{hg} \le M_h,$$

donc le lagrangien s'écrit :

$$\mathscr{L}_h(x_h) = \sum_g \alpha_{hg} \ln(x_{hg}) - \lambda_h \left(\sum_g p_g x_{hg} - M_h \right)$$

et les conditions du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathscr{L}_h}{\partial x_{hb}} = \frac{\alpha_{hb}}{\widetilde{x}_{hb}} - \lambda_h p_b = 0$$
$$\lambda_h \left(\sum_g p_g \widetilde{x}_{hg} - M_h \right) = 0,\ \lambda_h \geq 0$$

de la première relation, on déduit que $\lambda_h > 0$, la contrainte budgétaire est saturée :

$$\sum_g p_g \widetilde{x}_{hg} = M_h$$

or d'après la première condition :

$$p_b \widetilde{x}_{hb} = \frac{\alpha_{hb}}{\lambda_h} \Leftrightarrow p_g \widetilde{x}_{hg} = \frac{\alpha_{hg}}{\lambda_h},$$

on doit donc avoir :

$$\sum_g \frac{\alpha_{hg}}{\lambda_h} = M_h \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda_h} = \frac{M_h}{\sum_g \alpha_{hg}}$$

ce qui implique :

$$\widetilde{x}_{hb} = \frac{\alpha_{hb}}{\sum_g \alpha_{hg}} \frac{M_h}{p_b},\ b \in G$$

Arrivé à ce stade, on introduit la notation :

$$a_{hb} \triangleq \frac{\alpha_{hb}}{\sum_g \alpha_{hg}},\ b \in G$$

ce coefficient représente la préférence relative du ménage h pour le bien b (par rapport aux autres biens). Il vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} a_{hb} &> 0 \text{ (car } \alpha_{hb} > 0) \\ \text{et } \sum_b a_{hb} &= \frac{\sum_b \alpha_{hb}}{\sum_g \alpha_{hg}} = 1. \end{aligned}$$

La forme de la demande walrasienne obtenue est similaire à celle de la section précédente, à une différence près : maintenant le coefficient qui regroupe les termes d'utilité a_{hb} est différent pour chaque ménage :

$$\widetilde{x}_{hb} = a_{hb} \frac{M_h}{p_b},$$

la demande s'accroît avec a_{hb},la préférence relative du ménage h pour le bien b et avec M_h/p_b, son pouvoir d'achat mesuré en nombre d'unités du bien b. On voit qu'avec des préférences différentes, les ménages ne feront pas les mêmes choix de consommation même quand leur pouvoir d'achat est identique. Comme, par hypothèse, les ménages ont les mêmes dotations intiales, on a :

$$\omega_{hg} = \frac{\omega_{\bullet g}}{H},\ g \in G$$

donc le revenu du ménage h est égal à :

$$M_h = \sum_g p_g \omega_{hg} = \frac{1}{H} \sum_g p_g \omega_{\bullet g},$$

on en déduit la demande du ménage h :

$$x^d_{hb}(p) = a_{hb} \frac{1}{p_b H} \sum_g p_g \omega_{\bullet g}$$

et la demande agrégée qui s'adresse au marché :

$$\begin{aligned} X^d_b(p) &= \sum_h x^d_{hb}(p) \\ &= \sum_h \left\{ a_{hb} \frac{1}{p_b H} \sum_g p_g \omega_{\bullet g} \right\}, \end{aligned}$$

et l'on sort tous les termes qui ne dépendent pas de h de la première somme :

$$X^d_b(p) = \left(\frac{1}{p_b} \sum_g p_g \omega_{\bullet g} \right) \left(\frac{1}{H} \sum_h a_{hb} \right)$$

A ce stade on remarque que la quantité :

$$\overline{a}_b \triangleq \frac{1}{H} \sum_h a_{hb}$$

est la moyenne arithmétique des préférences relatives des H ménages pour le bien b. On peut donc réécrire la demande agrégée sous la forme :

$$X^d_b(p) = \frac{\overline{a}_b}{p_b} \sum_g p_g \omega_{\bullet g}$$

on retrouve donc la même expression que dans la section précédente avec la préférence moyenne pour le bien b à la place de la préférence commune pour le bien b ($\overline{a}_b$ au lieu de a_b). On trouve les prix d'équilibre en égalisant l'offre agrégée et la demande agrégée :

$$\begin{aligned} X^d_b(p^*) &= \omega_{\bullet b} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{a}_b}{p^*_b} \sum_g p^*_g \omega_{\bullet g} = \omega_{\bullet b},\ b \in G \end{aligned}$$

pour trouver les prix d'équilibre, on écrit l'équation du numéraire ($b = G$) :

$$\frac{\overline{a}_G}{p^*_G} \sum_g p^*_g \omega_{\bullet g} = \omega_{\bullet G}$$

en faisant le ratio de cette équation avec la précédente, on obtient :

$$\frac{\frac{\overline{a}_G}{p^*_G} \sum_g p^*_g \omega_{\bullet g}}{\frac{\overline{a}_b}{p^*_b} \sum_g p^*_g \omega_{\bullet g}} = \frac{\omega_{\bullet G}}{\omega_{\bullet b}},$$

ce qui donne finalement, avec $p_G^* = 1$ (le numéraire) :

$$\frac{p_b^*}{p_G^*}\frac{\overline{a}_G}{\overline{a}_b} = \frac{\omega_{\bullet G}}{\omega_{\bullet b}} \Leftrightarrow p_b^* = \frac{\overline{a}_b}{\overline{a}_G}\frac{\omega_{\bullet G}}{\omega_{\bullet b}},$$

on retrouve le même résultat que dans la section précédente en raisonnant sur la préférence moyenne pour le bien b au lieu de raisonner sur la préférence commune pour le bien b. Le prix relatif du bien b par rapport au bien g est donc égal à :

$$\boxed{\frac{p_b^*}{p_g^*} = \frac{\overline{a}_b}{\overline{a}_g}\frac{\omega_{\bullet g}}{\omega_{\bullet b}}}$$

Les quantités consommées à l'équilibre par les agents sont données par :

$$\begin{aligned}
x_{hb}^* &= a_{hb}\frac{1}{H}\sum_g \frac{p_g^*}{p_b^*}\omega_{\bullet g} \\
&= a_{hb}\frac{1}{H}\sum_g \frac{\overline{a}_g}{\overline{a}_b}\frac{\omega_{\bullet b}}{\omega_{\bullet g}}\omega_{\bullet g} \\
&= \frac{\omega_{\bullet b}}{H}\frac{a_{hb}}{\overline{a}_b}\sum_g \overline{a}_g,
\end{aligned}$$

On remarque maintenant que, par définition :

$$\overline{a}_g \triangleq \frac{1}{H}\sum_h a_{hg} > 0 \text{ et que } \sum_g a_{hg} = 1$$

donc :

$$\begin{aligned}
\sum_g \overline{a}_g &= \sum_g \frac{1}{H}\sum_h a_{hg} \\
&= \frac{1}{H}\sum_h\sum_g a_{hg} \\
&= \frac{1}{H}\sum_h 1 \\
&= \frac{H}{H} \\
&= 1
\end{aligned}$$

d'où les quantités d'équilibre :

$$x_{hb}^* = \frac{\omega_{\bullet b}}{H}\frac{a_{hb}}{\overline{a}_b} \Leftrightarrow x_{hg}^* = \frac{\omega_{\bullet g}}{H}\frac{a_{hg}}{\overline{a}_g}$$

le ménage h consommera donc la part suivante des ressources en bien g à l'équilibre :

$$\frac{x_{hg}^*}{\omega_{\bullet g}} = \frac{1}{H}\frac{a_{hg}}{\overline{a}_g},$$

cette part est d'autant plus importante qu'il préfére le bien g par rapport à la moyenne des ménages ($a_{hg}/\overline{a}_g$ élevé). Le second terme ($1/H$) est la part de toutes les ressources que possède le ménage h. Les échanges que réalisent le ménage h sont données par :

$$\begin{aligned}\frac{\overline{x}_{hg}}{\omega_{\bullet g}}-\frac{x^*_{hg}}{\omega_{\bullet g}} &= \frac{1}{H}-\frac{1}{H}\frac{a_{hg}}{\overline{a}_g}\\ &= \frac{1}{H}\left(1-\frac{a_{hg}}{\overline{a}_g}\right)\\ &= \frac{1}{H}\left(\frac{\overline{a}_g-a_{hg}}{\overline{a}_g}\right),\end{aligned}$$

et cet l'écart est d'autant plus important que le ménage h a des préférences a_{hg} qui s'écartent de la moyenne $\overline{a}_g$. On voit également que cette quantité s'annule quand tous les consommateurs ont les mêmes préférences pour le bien g :

$$a_{hg}=\overline{a}_g,\ \forall h.$$

Si un ménage accorde plus de valeur à un bien g que la moyenne :

$$\frac{a_{hg}}{\overline{a}_g}>1,$$

donc

$$\frac{\omega_{hg}}{\omega_{\bullet g}}-\frac{x^*_{hg}}{\omega_{\bullet g}}<0,$$

ce ménage achètera du bien g. Inversement, s'il accorde moins de valeur à ce bien que la moyenne, le ménage vendra du bien g pour acquérir des biens auxquels il accorde plus de valeur. Le prix de marché permet donc de ré-allouer les dotations initiales dans le sens des préférences des ménages. Les différences de préférences contribuent donc à expliquer les échanges commerciaux par la demande, alors que les différences de dotations initiales expliquaient les échanges commerciaux par l'offre.

Exemple 2.7. *Examinons la forme de la courbe de Pareto quand deux ménages ont des préférences différentes. On pose :*

$$\begin{aligned}U_1(x_1) &= \alpha_1\ln x_{11}+(1-\alpha_1)\ln x_{12},\\ U_2(x_2) &= \alpha_2\ln x_{21}+(1-\alpha_2)\ln x_{22},\end{aligned}$$

donc le coefficient α_h représente le prérérence du ménage h pour le bien 1, et $1-\alpha_h$ la préférence du ménage h pour le bien 2. Pour tracer la courbe de Pareto, on utilise, pour le ménage h :

$$\frac{\dfrac{\partial U_h}{\partial x_{h1}}}{\dfrac{\partial U_h}{\partial x_{h2}}}=\frac{\dfrac{\alpha_h}{x_{h1}}}{\dfrac{1-\alpha_h}{x_{h2}}}=\frac{\alpha_h x_{h2}}{(1-\alpha_h)\,x_{h1}},\ h=1,2$$

En égalisant les pentes des deux ménages on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_1 x_{12}}{(1-\alpha_1)\,x_{11}} &= \frac{\alpha_2 x_{22}}{(1-\alpha_2)\,x_{21}}\\ &\Leftrightarrow\ \alpha_1(1-\alpha_2)\,x_{12}x_{21}=(1-\alpha_1)\,\alpha_2x_{11}x_{22}\\ &\Leftrightarrow\ \alpha_1(1-\alpha_2)\,x_{12}(\omega_{\bullet 1}-x_{11})=(1-\alpha_1)\,\alpha_2x_{11}(\omega_{\bullet 2}-x_{12})\\ &\Leftrightarrow\ x_{12}=\frac{(1-\alpha_1)\,\alpha_2\omega_{\bullet 2}x_{11}}{\alpha_1(1-\alpha_2)\,\omega_{\bullet 1}+(\alpha_2-\alpha_1)\,x_{11}}\triangleq\frac{k_1x_{11}}{k_2+k_3x_{11}}\end{aligned}$$

en $x_{11} = 0$ *on obtient* $x_{12} = 0$ *et en* $x_{11} = \omega_{\bullet 1}$ *on obtient* $x_{12} = \omega_{\bullet 2}$ *de sorte que la courbe de Pareto relie les deux origines de la boîte d'Edgeworth. On la note en abrégé :*

$$x_{12} = \frac{k_1 x_{11}}{k_2 + k_3 x_{11}},\ k_1 > 0,\ k_2 > 0,\ -1 < k_3 < 1.$$

On remarque également que $k_2 + k_3 x_{11} > 0$. *En effet, si* $\alpha_2 \geq \alpha_1$, $k_3 \geq 0$ *ce qui garantit que* $k_2 + k_3 x_{11} > 0$. *D'autre part, si* $\alpha_2 < \alpha_1$, *l'inégalité suivante est vérifiée (en utilisant* $x_{11} \leq \omega_{\bullet 1}$*) :*

$$k_3 \ = \ \alpha_1 (1-\alpha_2)\,\omega_{\bullet 1} + \underbrace{(\alpha_2 - \alpha_1)}_{<0} x_{11} \ \geq \ \alpha_1 (1-\alpha_2)\,\omega_{\bullet 1} + (\alpha_2 - \alpha_1)\,\omega_{\bullet 1} \ = \ (1-\alpha_1)\,\alpha_2 \omega_{\bullet 1} \ > \ 0.$$

Les variations de la fonction sont les suivantes :

$$\frac{\partial x_{12}}{\partial x_{11}} = \frac{k_1 k_2}{(k_2 + k_3 x_{11})^2} > 0,$$

la courbe de Pareto est croissante. De plus :

$$\frac{\partial^2 x_{12}}{\partial x_{11}^2} = -\frac{2 k_1 k_2 k_3}{(k_2 + k_3 x_{11})^3}$$

dont le signe est opposé à celui de k_3 :

$$\frac{\partial^2 x_{12}}{\partial x_{11}^2} > 0 \Leftrightarrow k_3 < 0 \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2,$$

si le ménage 1 aime plus le bien 1 que le ménage 2, la courbe de Pareto est convexe. Inversement,

$$\frac{\partial^2 x_{12}}{\partial x_{11}^2} < 0 \Leftrightarrow k_3 > 0 \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2$$

si le ménage 2 aime plus le bien 1 que le ménage 1, la courbe de Pareto est concave. Enfin, si les ménages ont des préférences identiques, $k_3 = 0$, *on trouve que la courbe de Pareto est une droite,* $\partial^2 x_{12} / \partial x_{11}^2 = 0$.

Exercices

L'objectif de ces exercices est d'effectuer des rappels sur la manière dont les ménages prennent leurs décisions séparément, et de faire le lien avec l'approche par l'équilibre général.

Consommation et temps de travail. On considère un consommateur de revenu M qui doit décider de la consommation d'un bien, en quantité c, et de son temps de loisir, d'une durée x. Le temps disponible de ce consommateur est noté $\overline{x}$. Le prix unitaire du bien est p et le salaire horaire w. On suppose que le consommateur maximise son utilité sous contrainte de budget. Dans cet exercice, l'utilité est donnée par :

$$U(c, x) = \ln\left(c^{\alpha} x^{1-\alpha}\right),\ 0 < \alpha < 1$$

1. Commenter la forme de la fonction d'utilité.

2. Comment les utilités marginales du bien et des loisirs varient-elles avec la consommation et le temps de loisir ?
3. Quel est le taux marginal de substitution entre le bien de consommation et le temps de travail ? Que représente t-il ?
4. Ecrire la contrainte budgétaire du ménage, en considérant qu'il possède un revenu égal à M, et qu'une heure de loisir est payée au prix w (i.e., le coût d'opportunité du loisir est égal au salaire horaire).
5. Ecrire et résoudre le programme du consommateur.
6. Quelle est la part des dépenses de consommation dans les dépenses totales ? Même question pour le coût total d'opportunité du loisir.
7. Quelle est l'utilité indirecte du consommateur ?
8. En utilisant l'identité de Roy (en annexe), recalculer les demandes walrasiennes.
9. On fait maintenant l'hypothèse que le consommateur possède $\overline{c}$ unités du bien de consommation et $\overline{x}$ heures disponibles pour le travail ou les loisirs. Quel est sa richesse potentielle M?
10. Réécrire la contrainte de budget, en admettant que l'individu *peut* vendre $\overline{c} = 0$ unités du bien et $\overline{x} = 1$ unités de travail, sans préjuger de ce qu'il fera effectivement après maximisation de l'utilité. Montrer que l'on obtient une relation standard du type "Dépense ≤ Revenu maximum possible".
11. Réexprimer les demandes de bien et de loisir par rapport aux prix p et w.
12. On considère maintenant que le ménage peut vendre ou acheter des biens et du travail. On considère qu'une offre nette négative est une demande et qu'une demande nette négative est une offre. Quelle est sa demande nette de bien et son offre nette de travail ? Commenter

Prix et salaire d'équilibre. On considère deux consommateurs, indicés 1 et 2, avec les mêmes préférences que dans l'exercice précédent. Pour le ménage 1, on a :

$$U_1(c_1, x_1) = c_1^{\alpha_1} x_1^{1-\alpha_1},\ 0 < \alpha_1 < 1,$$

et pour le ménage 2 :

$$U_2(c_2, x_2) = c_2^{\alpha_2} x_2^{1-\alpha_2},\ 0 < \alpha_2 < 1.$$

1. Ecrire les demandes des deux consommateurs en fonction de leurs revenus respectifs M_1 et M_2.
2. On suppose que les dotations initiales des deux ménages sont $\overline{c}_1 = 0$, $\overline{c}_2 = \overline{c}$, $\overline{x}_1 = \overline{x}/2$ et $\overline{x}_2 = \overline{x}/2$. Il y a donc $\overline{c}$ unités de consommation et $\overline{x}$ heures disponibles dans l'économie. Commenter la répartition des dotations initiales entre les ménages et écrire les fonctions agrégées de demande et d'offre.
3. En prenant le bien de consommation comme numéraire, quel est le salaire horaire d'équilibre w^* ? Quels sont ses déterminants ?
4. Quelles sont les quantités d'équilibre ?
5. Quelles sont les quantités échangées ? En déduire une description des relations d'échange entre les deux ménages.
6. Montrer que les deux ménages ont amélioré leur situation par rapport à l'autarcie.

L'économie des camps de prisonniers. Cet exercice s'inspire de l'article de R. Radfort (1946, *Economica*) sur l'organisation économique des camps de prisonniers pendant la Seconde Guerre Mondiale. On considère une économie constituée, dans un premier temps, de deux baraquements de prisonniers séparés. Les prisonniers peuvent échanger le contenu des colis qu'ils reçoivent. Pour simplifier le problème, on suppose qu'il n'y a que deux biens : les cigarettes et le lait concentré en boîte. Les biens que chacun souhaite échanger sont écrits sur une ardoise à l'entrée du baraquement. Une fois qu'une transaction est réalisée, le taux d'échange est ajouté sur l'ardoise et devient donc connu de tous. Pour l'exercice, on suppose que les décisions sont prises par un prisonnier représentatif au sein de chaque baraquement. On suppose qu'il y a deux baraquements, A et B, et que chaque baraquement correspond à un marché.

1. Dans quelle mesure les hypothèses de l'économie d'échange sont elles réunies ?

   Le bien 1 est la cigarette et le bien 2 la boîte de lait. Dans le baraquement A les quantités totales de cigarettes et de lait sont respectivement de $\omega^A_{1\bullet} = 20$ *et* $\omega^A_{2\bullet} = 5$. *Dans le baraquement B, les quantités respectives sont* $\omega^B_{1\bullet} = 5$ *et* $\omega^B_{2\bullet} = 20$.

   On suppose que les préférences des prisonniers sont les mêmes dans les deux baraquements. Leurs préférences sont supposées pouvoir se représenter par la fonction d'utilité $\mathrm{U}(x_1, x_2) = \ln\left(x_1^{0,2} x_2^{0,8}\right)$ *où* x_1 *est la quantité de cigarettes et* x_2 *la quantité de lait en boîte.*

2. Dans les deux baraquements la cigarette s'impose comme numéraire. Quels sont les arguments pratiques qui ont amené les prisonniers à préférer les cigarettes au lait en boîte comme numéraire ?
3. Calculer les prix d'équilibres dans les deux baraquements.
4. Une rumeur qui circule dans le camp veut qu'un aumônier, seule personne autorisée à circuler entre les deux baraquements, puisse finir la journée avec beaucoup plus de boîtes de lait qu'il n'en avait le matin. Cette rumeur vous semble t-elle plausible sur le plan économique ? On justifiera la réponse en supposant que, le matin, l'aumônier possède une seule boîte de lait.
5. On autorise maintenant les prisonniers à circuler entre les deux baraquements, il n'y a plus qu'un seul marché. En supposant que les dotations initiales sont inchangées, quel est le nouveau prix d'équilibre ? Comment les utilités varient-elles dans les deux baraquements ?
6. On suppose qu'en plus des colis précédents, des colis contenant globalement 10 unités de cigarettes arrivent subitement dans le camp. Comment le prix du lait en boîte varie t-il ? Commenter.
7. On suppose maintenant que par rapport à la situation initiale aucun colis n'arrive, mais que les fumeurs consomment la moitié des cigarettes disponibles. Comment le prix du lait en boîte varie t-il ?
8. Expliquer en quoi les réponses obtenues aux deux dernières questions peuvent être utilisées pour critiquer le choix du numéraire qui a été effectué.

Table des Graphiques

1.1 Ensemble de production 5
1.2 Ensemble de budget 9

2.1 Ensemble de budget 15
2.2 Courbes d'iso utilité 16
2.3 Maximisation de l'utilité 18
2.4 Boîte d'Edgeworth 22
2.5 Boîte d'Edgeworth avec droite commune de budget 24
2.6 Maximisation de l'utilité du ménage 1 24
2.7 Demandes incompatibles pour un vecteur de prix donné 25
2.8 Allocation d'équilibre : les demandes sont compatibles pour $p = p^*$ 26
2.9 Courbe de Pareto (Cobb-Douglas, préférences communes) 29
2.10 Courbe des contrats (Cobb-Douglas, préférences communes) 29

Table des Tableaux

Index

Boîte d'Edgeworth, 21

Contrainte budgétaire, 14, 21, 33
Courbe
    Courbe d'iso-utilité, 15
    de Pareto, 28, 30, 47
    des contrats, 28, 30

Demande
    agrégée, 36
    individuelle, 19
    walrasienne, 16, 34

Equilibre
    concurrentiel, 25, 36
    dotations différentes, 39
    préférences différentes, 43
    walrasien, voir concurrentiel

Loi de Walras, 20, 36

Optimum de Pareto, 28

Prix d'équilibre, 19
Prix d'équilibre, 37

Taux marginal de substitution, 35