Microéconomie des Choix Intertemporels

Emmanuel DUGUET

2017

Sommaire

NOTATIONS

- période t : intervalle de temps allant de la date $\tau = t-1$ à la date $\tau = t$.
- $P(t)$: indice des prix à la date t.
- p_t : prix de la période t.
- c_t : consommation de la période t.
- w_t : salaire nominal de la ériode t.
- ℓ_t : emploi de la période t.
- M_t : revenu salarial de la période t, $M_t = w_t \ell_t$.
- i_t : taux d'intérêt nominal pour un placement réalisé entres les dates $\tau = t-1$ et $\tau = t$.
- $\hat{\imath}_t$: taux d'intérêt nominal cumulé pour un placement réalisé entres les dates $\tau = 0$ et $\tau = t$.
- π_t : taux d'inflation entre les dates $\tau = t-1$ et $\tau = t$.
- $\hat{\pi}_t$: taux d'inflation cumulé entre les dates $\tau = 0$ et $\tau = t$.
- r_t : taux d'intérêt réel pour un placement réalisé entre les dates $\tau = t-1$ et $\tau = t$.
- $\hat{r}_t$: taux d'intérêt réel cumulé pour un placement réalisé entre les dates $\tau = 0$ et $\tau = t$.
- β_t : facteur d'actualisation d'une valeur de début de période.
- β'_t : facteur d'actualisation d'une valeur de fin de période.
- γ_t : facteur d'actualisation psychologique d'une utilité en début de période.
- ϕ_t : taux de préférence pour le présent, $\gamma_1 = 1/(1+\phi_1)$.
- μ : élasticité de production
- A : productivité globale des facteurs
- k : capital
- ℓ : emploi
- I : investissement
- δ_t : taux de dépréciation du capital pendant la période t

CHAPITRE 1

L'actualisation

Les décisions que nous étudions dans ce cours portent potentiellement sur de nombreuses périodes. On pourrait penser *a priori* qu'il suffit d'additionner les gains générés par les décisions intertemporelles pour obtenir l'objectif du ménage ou de l'entreprise. Il n'en est rien pour trois raisons principales.

Premièrement, la valeur d'une unité monétaire varie dans le temps du fait de l'inflation. Si l'on veut calculer correctement un montant financier global obtenu par l'addition de montants pris à des dates différentes, il faut les corriger de l'inflation. On se ramène généralement à la valeur de la première période, la date où les décisions sont prises, on parle de valeur actualisée ou actuelle. Si on possède 100 € à la date $\tau = 0$ et que le taux d'inflation est de $1,5\%$ entre cette date et la date $\tau = 1$, le pouvoir d'achat de nos 100€ sera réduit de $1,5\%$ sur cette période, et il vaudront en fait $100/(1+1,015) \simeq 98,52$€ de la date $\tau = 0$.

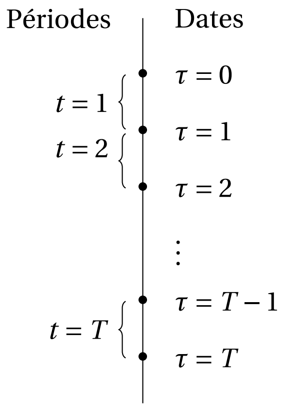
Une deuxième raison pour laquelle on doit actualiser est qu'une unité monétaire peut se placer et rapporter des intérêts. De ce fait, un montant monétaire n'a pas la même valeur selon la date à laquelle on le perçoit. Quand on perçoit une somme d'argent plus tôt, on peut la placer plus longtemps et percervoir plus d'intérêts. Il vaut donc mieux percevoir un montant en $\tau = 0$ que le même montant en $\tau = 1$. Laissons le problème de l'inflation de côté. Si on place aujourd'hui, entre les dates $\tau = 0$ et $\tau = 1$, un montant de 100 €, à un taux annuel de 5%, on obtiendra en fin de période un montant de 1,05× 100=105€. Combien faut-il placer en $\tau = 0$ pour obtenir 100€ en $\tau = 1$? 100/1,05≃ 95,24€. Ainsi, la valeur actualisée ou valeur actuelle de 100€ de la date $\tau = 1$ est de 95,24€ en $\tau = 0$. Un montant perçu en $\tau = 1$ vaut donc $100 - 95,24 = 4,76$€ de moins que le même montant perçu en $\tau = 0$.

La troisième raison pour actualiser est la préférence pour le présent. Si une personne préfère consommer aujourd'hui plutôt que demain, elle demandera une compensation pour reporter sa consommation à une date ultérieure. On représente cette préférence pour le présent directement dans la fonction d'utilité en donnant une pondération plus faible aux utilités futures. Dans le cas des fonctions d'utilité, on raisonne par analogie avec les exemples précédents.

Dans ce chapitre, nous examinons comment on peut rendre comparables des quantités prises à des dates différentes. La somme de ces quantités est appelée valeur actualisée ou valeur actuelle. On actualise en début de période parce que les décisions sont prises aujourd'hui pour l'avenir, il nous faut donc un objectif écrit en quantités d'aujourd'hui.

Nous commencerons par voir le cas de l'inflation, du taux d'intérêt nominal puis du taux d'intérêt réel. Dans le cas de l'inflation, nous examinerons également deux conventions : avec des valeurs mesurées en début de période ou en fin de période. Par convention, nous posons que l'analyse porte sur T périodes, notées $t = 1$ à $t = T$, qui sont elles-mêmes définies à partir de $T+1$ dates, de $\tau = 0$ à $\tau = T$ selon la manière décrite par la figure 1.1. Dans le but de clarifier l'analyse, les dates seront notées avec des parenthèses, comme dans l'expression $P(t)$ alors que les périodes seront notées avec des indices, comme dans l'expression π_t.

GRAPHIQUE 1.1 – Echelle de temps



1.1 Taux d'inflation

Une unité monétaire à une date donnée ne vaut pas la même chose que la même unité monétaire à une autre date. Ainsi, le tableau 1.1 donne l'indice annuel des prix à la consommation de l'INSEE (avec DOM-TOM, loyers et tabac), pour les années 1999 à 2014, base 100 en 1999. Les indices de prix sont donnés à la date du 31/12 de l'année indiquée, ce qui est équivalent à les donner au 01/01 de l'année qui suit. Avec les notations de la figure 1.1 le 31 décembre 1999 correspond à la date $\tau = 0$ et le 31 décembre 2000 à la date $\tau = 1$. Ces deux dates définissent l'année 2000, qui n'est autre que la période $t = 1$, de sorte que la première ligne du tableau 1.1 correspond à l'inflation de la période $t = 1$.

Le taux d'inflation annuel est égal au taux de croissance annuel de l'indice des prix :

$$\pi_t = \frac{P(t)}{P(t-1)} - 1,\ t \geq 1$$

où π_t se réfère à la période t et $P(t)$ à la date t. Le taux d'inflation annuel de la première période est égal à $\pi_1 = (101.69 - 100)/100 = 1.69\%$, car l'indice est base 100 au 31/12/1999 ($\tau = 0$), ce qui signifie que les prix ont augmenté de 1.69% pendant l'année 2000. On retrouve la valeur du tableau 1.1. Le taux d'inflation cumulé $\hat{\pi}_t$ peut se calculer de deux manières. Premièrement, en prenant l'année de base comme référence, ce qui donne :

$$\hat{\pi}_t = \frac{P(t)}{P(0)} - 1,\ t \geq 1,$$

et, deuxièmement, à partir des taux d'inflation annuels. Pour cela on remarque que :

$$\begin{aligned} 1 + \hat{\pi}_t &= \frac{P(t)}{P(0)} \\ &= \frac{P(t)}{P(t-1)} \frac{P(t-1)}{P(t-2)} \cdots \frac{P(1)}{P(0)} \\ &= (1+\pi_t)(1+\pi_{t-1}) \dots (1+\pi_1) \end{aligned}$$

TABLEAU 1.1 – Indice annuel des prix à la consommation (au 31/12)

Année	Indice (100 ← 1999)	Période	Taux	Taux cumulé	Actualisation début	Actualisation fin
	$P(t)$	t	π_t	$\hat{\pi}_t$	β_t	β'_t
2000	101.69	1	1.69%	1.69%	1.000	0.983
2001	103.38	2	1.66%	3.38%	0.983	0.967
2002	105.37	3	1.92%	5.37%	0.967	0.949
2003	107.56	4	2.08%	7.56%	0.949	0.930
2004	109.85	5	2.13%	9.85%	0.930	0.910
2005	111.84	6	1.81%	11.84%	0.910	0.894
2006	113.67	7	1.64%	13.67%	0.894	0.880
2007	115.36	8	1.49%	15.36%	0.880	0.867
2008	118.61	9	2.81%	18.61%	0.867	0.843
2009	118.72	10	0.09%	18.72%	0.843	0.842
2010	120.53	11	1.53%	20.53%	0.842	0.830
2011	123.08	12	2.12%	23.08%	0.830	0.812
2012	125.49	13	1.96%	25.49%	0.812	0.797
2013	126.58	14	0.86%	26.58%	0.797	0.790
2014	127.21	15	0.50%	27.21%	0.790	0.786

Source : INSEE (BDM)

d'où la formulation générale :

$$\hat{\pi}_t = \prod_{s=1}^{t}(1+\pi_s) - 1$$

sur l'ensemble des 15 périodes (de $t = 1$ à $t = 15$) les prix ont donc augmenté de $\hat{\pi}_{15} = 27.21\%$.

Actualisations avec valeurs observées en début de période. La valeur actualisée A_t d'un montant E_t de la période t est la valeur dont il faut disposer à la période $t = 0$ pour obtenir E_t à la période t. Dans un premier temps, on considère que toutes les valeurs observées le sont en début de période. Ceci signifie que l'inflation de l'année en cours ne s'est pas encore appliquée aux valeurs observées. Cette convention implique donc un décalage d'un an entre la valeur que l'on souhaite actualiser et le taux d'inflation que l'on doit utiliser.

Prenons un exemple : pour une série de montants $E_1, \ldots, E_t$ (E pour épargne). Le montant E_1 est une valeur au 1er janvier 2000 ($\tau = 0$). Par définition aucune correction n'est nécessaire pour l'année 2000 car nous sommes le 1er janvier ; la valeur actualisée est simplement $A_1 = E_1$. Par contre, au 1er janvier 2001 $\tau = 1$, le montant est E_2 et il faudra tenir compte de l'inflation qui a eu lieu entre le 1er janvier 2000 et le 31 décembre 2000. Plus précisément, si l'on dispose d'un montant A_2 au 1er janvier 2000, ce montant sera de $A_2(1+\pi_1)$ au 1er janvier 2001 ($\tau = 2$). On doit donc avoir l'égalité suivante :

$$A_2(1+\pi_1) = E_2 \Leftrightarrow A_2 = \frac{E_2}{1+\pi_1}$$

la valeur actualisée du montant E_2 de la période 2 est donc égal à $E_2/(1+\pi_1)$ car π_1 mesure l'inflation de la période 1 qui correspond à l'année 2000. Plus généralement si on dispose d'une valeur A_t au début de la période 1 (en $\tau = 0$), on obtiendra la valeur suivante à la période t :

$$\underbrace{A_t}_{\text{période 1}} \underbrace{(1+\pi_1)}_{\text{période 2}} \ldots \underbrace{(1+\pi_{t-1})}_{\text{période } t-1} = \underbrace{A_t \prod_{s=1}^{t-1}(1+\pi_s)}_{\text{début de la période } t}$$

et comme on dispose du montant E_t pour la période t, on obtient :

$$A_t \prod_{s=1}^{t-1}(1+\pi_s) = E_t \Leftrightarrow A_t = \frac{E_t}{\prod_{s=1}^{t-1}(1+\pi_s)}$$

Cette relation signifie que pour obtenir E_t Euros au début de la période t (donc à la date $\tau = t-1$), il faut posséder A_t Euros au début de la période 1 (en $\tau = 0$). Le coefficient qui permet de passer de A_t à E_t est le facteur d'actualisation. On le note :

$$\beta_t = \frac{1}{\prod_{s=1}^{t-1}(1+\pi_s)}$$

il représente la valeur d'un Euro de la période t à la période 1 ; on l'obtient en posant $E_t = 1$ dans la définition de A_t. Le résultat est donné dans le tableau 1.1. Un Euro du 1$^{\text{er}}$janvier 2014 vaut 79 centimes d'un Euro du 1$^{\text{er}}$janvier 2000. La perte de pouvoir d'achat sur la période est donc de 21 centimes par Euro.

Plus généralement, on actualise un flux de montants monétaires. Si l'on veut la valeur actuelle de la suite des montants $E_1, \ldots, E_t$ il suffit d'additionner les valeurs actuelles correspondantes $A_1, \ldots, A_t$. On obtient la valeur actualisée totale :

$$A = A_1 + \cdots + A_t = E_1 + \sum_{s=2}^{t} \beta_s E_s,$$

ce résultat amène souvent à adopter la convention $\beta_1 = 1$, qui signifie qu'on n'actualise pas la période 0, et l'on réécrit la valeur actualisée comme :

$$A = \sum_{s=1}^{t} \beta_s E_s \text{ avec } \beta_1 = 1.$$

Actualisation avec valeurs observées en fin de période. Cette fois-ci, on considère que toutes les grandeurs monétaires sont observées au 31/12 de chaque année (soit le 1/01 de l'année qui suit). Considérons une suite de montants $E_1, \ldots, E_t$. Par définition, le premier montant E_1 subit toute l'inflation de l'année 2000 (la période $t = 1$) puisqu'il est observé au 31/12 de cette même année. Donc sa valeur actualisée vérifiera $(1+\pi_1)A'_1 = E_1$ de sorte que $A'_1 = E_1/(1+\pi_1)$. Considérons maintenant le montant E_2. Il est mesuré au 31/12/2001 (en $\tau = 2$) donc l'inflation de l'année 2001 (la période $t = 2$) l'affecte également. Plus précisément, si on dispose d'une valeur actualisée A'_2 de E_2, elle doit vérifier $(1+\pi_1)(1+\pi_2)A'_2 = E_2$ d'où $A'_2 = E_2/((1+\pi_1)(1+\pi_2))$. Plus généralement, si on dispose d'une valeur actualisée A'_t de E_t, on doit avoir :

$$(1+\pi_1)\ldots(1+\pi_t)A'_t = E_t \Leftrightarrow A'_t = \frac{E_t}{\prod_{s=1}^{t}(1+\pi_s)}$$

donc on définit le facteur d'actualisation par ($E_t = 1$) :

$$\beta'_t = \frac{1}{\prod_{s=1}^{t}(1+\pi_s)}$$

il représente la valeur au début de la période 1 (à la date $\tau = 0$) d'un Euro de la fin de la période t (de la date $\tau = t$). Si on dispose d'une suite de montants $E_1, \dots, E_t$, la valeur actualisée est égale à :

$$A' = \beta'_1 E_1 + \cdots + \beta'_t E_t = \sum_{s=1}^{t} \beta'_t E_t.$$

On remarque la propriété suivante :

$$\beta'_{t-1} = \beta_t = \frac{1}{(1+\pi_1)\dots(1+\pi_{t-1})}.$$

Taux d'inflation moyen. De nombreuses présentations théoriques font l'hypothèse d'un taux d'inflation constant. Ici, ce taux constant est relié au taux d'inflation moyen, défini comme le taux d'inflation constant π donnant le même niveau général des prix que la suite des taux variables $\{\pi_t\}$. Ce taux moyen se définit par rapport au nombre de périodes. Ici, on fixe T périodes de $t = 1$ à $t = T$ et on mesure les montants en fin de période. Quand un taux d'inflation est constant $\pi_t = \pi,\ \forall t \in \{1, \dots, T\}$, le niveau général des prix de la période T s'écrit :

$$P(T) = (1+\pi)^T P(0)$$

et avec des taux variables, il s'écrit :

$$P(T) = (1+\pi_1)\dots(1+\pi_T)P(0) = \prod_{s=1}^{T}(1+\pi_s)P(0)$$

en égalisant les deux expressions du niveau général des prix, on obtient :

$$(1+\pi)^T = \prod_{s=1}^{T}(1+\pi_s) \Leftrightarrow \pi = \left(\prod_{s=1}^{T}(1+\pi_s)\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

on obtient la *moyenne géométrique* des taux annuels. On remarque également que :

$$\pi = \exp\left(\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}\ln(1+\pi_s)\right) - 1.$$

D'après le tableau 1.1, le taux d'inflation moyen est égal à :

$$r = 1.2721^{(1/15)} - 1 \simeq 1,62\%.$$

Cas particuliers. Quand le taux d'inflation est constant, les formules se simplifient. Le taux d'inflation cumulé est égal à $\hat{\pi}_t = (1+\pi)^t - 1$ et le facteur d'actualisation à :

$$\beta'_t = \left(\frac{1}{1+\pi}\right)^t.$$

Si l'on suppose maintenant qu'un ménage perçoit une suite de T revenus constants E, mesurés en fin de période, la valeur actualisée de la suite de ces revenus sera égale à :

$$A' = E \times \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{1+\pi}\right)^t.$$

On pose :

$$S_T = \sum_{t=1}^{T} z^t, \text{ avec } z = \frac{1}{1+\pi}, \ |z| < 1.$$

On peut simplifier cette formule en remarquant que :

$$\begin{aligned} S_T &= z + z^2 + \cdots + z^T \\ z \times S_T &= z^2 + z^3 + \cdots + z^{T+1} \\ \Rightarrow (1-z) S_T &= z - z^{T+1} \\ \Leftrightarrow S_T &= \frac{z}{1-z}\left(1 - z^T\right) \end{aligned}$$

donc on peut écrire :

$$A' = E \times \frac{z}{1-z}\left(1 - z^T\right)$$

quand $T \to \infty$, on obtient $A'_\infty = E \times z/(1-z) = E/\pi$. Quand on veut commencer la somme à la période $t = 0$ au lieu de $t = 1$, il suffit d'ajouter la première valeur (égale à $z^0 = 1$) donc on obtient :

$$S_T^0 = 1 + S_T = \frac{1 - z^{T+1}}{1-z}$$

et quand $T \to \infty$, on obtient $S_\infty^0 \to 1/(1-z)$ donc $A_\infty^{0\prime} = E/(1-z) = (1 + 1/\pi)E$.

1.2 Taux d'intérêt nominal

On dispose de montants d'épargne disponibles selon la série $E_1, \ldots, E_t$. On suppose qu'ils sont placés en début de période au taux d'intérêt i_t pour un placement pendant la période t. La valeur actualisée A'_t d'un montant t est le montant dont il faut disposer à la date $\tau = 0$ (en début de période $t = 1$) pour obtenir E_t à la fin de la période t (à la date $\tau = t$). Le tableau 1.2 donne le taux annuel moyen du livret A ; il s'agit d'un taux moyen parce que le taux du livret A change habituellement en cours d'année.

Supposons que l'on place un montant A'_1 au début de l'année 2000 au taux i_1. A la fin de l'année 2000 on disposera du capital et des intérêts,soit $(1+i_1)A'_1$. Donc, pour obtenir un montant E_1 au début de l'année 2001 (en $\tau = 1$), il faut placer un montant $A'_1 = E_1/(1+i_1)$ au début de l'année 2000 (en $\tau = 0$). On dit que le montant A'_1 est la valeur actualisée de E_1. Le facteur d'actualisation est égal à $\beta'_1 = 1/(1+i_1)$. Il représente le montant qu'il faut placer au début de l'année 2000 pour obtenir 1 Euro au début de 2001. Pour obtenir E_1 Euros en 2001, on doit donc placer $\beta'_1 E_1 = A'_1$ Euros en 2000. Supposons maintenant que l'on veuille actualiser un montant de l'année 2002. Si on place A'_2 au début de 2000, on obtiendra $(1+i_1)(1+i_2)A'_2$ Euros au début de 2002, puisque le placement A'_2 rapportera $(1+i_1)A'_2$ en 2001 et que ce montant est réinvesti pendant un an au taux i_2. Donc pour obtenir A'_2 Euros en 2002, il faut placer $A_2 = E_2/((1+i_1)(1+i_2))$ en 2000. Le facteur d'actualisation correspondant est donc égal à $\beta'_2 = 1/((1+i_1)(1+i_2))$. Il représente le montant qu'il faut placer au 1er janvier 2000, pour obtenir 1 Euro au 31 décembre 2002. Plus généralement, un montant A'_t placé en $\tau = 0$ pendant t années générera le revenu total suivant :

$$\underbrace{A'_t}_{\text{en } \tau=0} (1+i_1)\ldots(1+i_t) = A'_t \prod_{s=1}^{t} (1+i_s),$$

TABLEAU 1.2 – Taux d'intérêt annuel

Année	Période t	Taux annuel i_t	Taux cumulé $\hat{\imath}_t$	Facteur d'actualisation β'_t
2000	1	2.63%	2.63%	0.974
2001	2	3.00%	5.70%	0.946
2002	3	3.00%	8.87%	0.918
2003	4	2.69%	11.80%	0.894
2004	5	2.25%	14.32%	0.875
2005	6	2.15%	16.77%	0.856
2006	7	2.44%	19.62%	0.836
2007	8	2.90%	23.08%	0.812
2008	9	3.67%	27.59%	0.784
2009	10	1.92%	30.04%	0.769
2010	11	1.46%	31.93%	0.758
2011	12	2.08%	34.68%	0.742
2012	13	2.25%	37.71%	0.726
2013	14	1.58%	39.89%	0.715
2014	15	1.15%	41.50%	0.707

Source : Taux moyen du livret A.

donc pour obtenir E_t Euros après t années de placement, il faut investir le montant suivant au début de la période 1 :

$$A'_t = \frac{E_t}{\prod_{s=1}^{t}(1+i_s)}$$

ce qui fournit le facteur d'actualisation qui donne le montant qu'il faut placer pour obtenir 1 Euro en fin de période t (cas $E_t = 1$) :

$$\beta'_t = \frac{1}{\prod_{s=1}^{t}(1+i_s)}.$$

On définit le taux d'intérêt cumulé comme le taux qui donne la même croissance du placement A'_t que la succession des taux annuels. One le note $\hat{\imath}_t$:

$$1+\hat{\imath}_t = \prod_{s=1}^{t}(1+i_s) \Leftrightarrow \hat{\imath}_t = \prod_{s=1}^{t}(1+i_s) - 1$$

et l'on a :

$$\beta'_t = \frac{1}{1+\hat{\imath}_t}.$$

Si on souhaite obtenir la valeur actualisée d'une suite de montants $E_1, \ldots, E_T$, on additionne leurs valeurs actualisées $A'_1, \ldots, A'_T$:

$$A' = A'_1 + \cdots + A'_T = \sum_{t=1}^{T} \beta'_t E_t$$

pour obtenir E_1 à la fin de la période 1, il suffit de placer $\beta'_1 E_1$ en début de période 1 ; pour obtenir E_t en fin de période t, il suffit de placer $\beta'_t E_t$. En additionnant tous les montants qu'il faut placer, on obtient la valeur actualisée de la suite des placements.

Taux d'intérêt moyen. Considérons T années de placement. Le taux d'intérêt moyen sur cette période ($\tau \in [0,T]$) est égal au taux d'intéret annuel constant i qui produit la même croissance que la suite des taux observés sur cette même période $i_1,\ldots,i_T$. On doit donc avoir :

$$
\begin{aligned}
(1+i)^T &= \prod_{s=1}^{T}(1+i_s)\\
\Leftrightarrow i &= \left(\prod_{s=1}^{T}(1+i_s)\right)^{\frac{1}{T}} - 1
\end{aligned}
$$

on peut aussi définir ce taux moyen à partir des intérêts cumulés :

$$i = (1+\hat{\imath}_t)^{\frac{1}{T}} - 1$$

sur les 15 années 2000-2014, le taux annuel moyen du livret A était de :

$$i = 1.415^{1/15} - 1 \simeq 2.34\%$$

.

Cas particuliers. Quand le taux d'intérêt est constant, les formules se simplifient comme pour le cas de l'inflation. Le taux d'intérêt cumulé sur la période $[0,t]$ est égal à : $\hat{\imath}_t = (1+i)^t - 1$ et le facteur d'actualisation à :

$$\beta'_t = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t.$$

Si l'on suppose maintenant qu'un ménage perçoit une suite de T revenus constants E et qu'ils sont placés en début de période à un taux $i > 0$, la valeur actualisée de ces revenus sera égale à :

$$A' = E\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{1+i}\right)^t = \frac{E}{i}\left(1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^T\right)$$

et quand $T \to \infty$, on obtient l'expression bien connue E/i.

1.3 Taux d'intérêt réel

Dans la pratique, il faut tenir compte à la fois de l'inflation et des intérêts pour obtenir un montant actualisé. En effet, les tableaux 1.1 et 1.2 montrent que les intérêts cumulés sur la période 2000-2014, de 41%, ont dû faire face à une érosion monétaire de 27%. Il faut donc faire des calculs corrigés de l'inflation pour mesurer correctement l'évolution du pouvoir d'achat.

Quand on place un montant A'_1 au début de la période $t = 1$, on gagne des intérêts grâce au placements et on perd du pouvoir d'achat à cause de l'inflation. Au bout d'un an le placement aura rapporté un gain nominal de $(1+i_1)A'_1$ mais le pouvoir d'achat aura été réduit par l'inflation de la manière suivante :

$$\frac{(1+i_1)A'_1}{1+\pi_1}$$

on peut donc raisonner comme si le montant A'_1 avait été multiplié de la manière suivante :

$$(1+r_1)A'_1,\ \text{avec}\ 1+r_1 = \frac{1+i_1}{1+\pi_1}$$

, r_1 est appelé le *taux d'intérêt réel* de la période 1 car le pouvoir d'achat de A'_1 Euros placés au taux i_1 avec un taux d'inflation de π_1 évolue selon le taux r_1. Ce taux peut être positif (gain de pouvoir d'achat) ou négatif (perte de pouvoir d'achat). En développant, on voit que le taux d'intérêt réel est égal à

$$r_t = \frac{i_t - \pi_t}{1 + \pi_t}$$

quand les deux taux sont proches de zéro, on utilise souvent l'approximation :[1]

$$r_t \simeq i_t - \pi_t.$$

le tableau 1.3 présente les deux modes de calcul ; ils donnent des résultats très proches. Le taux d'intérêt réel cumulé, noté $\hat{r}_t$, se calcule comme dans les cas précédents :

$$\hat{r}_t = \prod_{s=1}^{t} (1 + r_s) - 1$$

et le facteur d'actualisation s'en déduit immédiatement :

$$\beta'_t = \frac{1}{1 + \hat{r}_t}.$$

Les calculs sont présentés dans le tableau 1.3. On voit que le taux réel était négatif en 2010 et 2011, ce qui indique que le livret A menait à une perte de pouvoir d'achat, et que sur 15 ans, un placement n'aurait rapporté que $\hat{r}_{15} = 11.23\%$. A titre d'exercice, calculons le taux annuel moyen (noté r). On doit avoir :

$$r = 1.1123^{1/15} - 1 \simeq 0.712\%,$$

ce qui est très faible, comme pour les placements sans risque en général.

1.4 La préférence pour le présent

De la même manière que l'on actualise les montants monétaires, on peut actualiser les utilités afin de définir une utilité intertemporelle. Un ménage ne valorise pas forcément de la même manière les consommations du même bien qui sont effectuées à différentes dates. On constate souvent une préférence pour le présent : les consommations aujourd'hui sont préférées aux consommation des mêmes biens demain. Ceci revient à dire que l'utilité d'une même consommation varie selon la date à laquelle elle a lieu : plus la date est éloignée moins l'utilité serait élevée. Il existe un moyen simple de transférer une consommation vers l'avenir : épargner. De même on peut déplacer une consommation vers le présent en empruntant.

Le sens de déplacement des consommations dépendra de manière importante de la préférence pour le présent. Sans entrer dans les détails, que nous verrons dans le chapitre sur les décisions des ménages, on peut définir une utilité actualisée. Soit U_t l'utilité des consommations de la date t, on peut définir un facteur d'actualisation subjectif (car il s'applique à l'utilité, qui est subjective), que l'on note γ_t, et qui représente la valeur relative d'une utilité future par rapport à l'utilité de la période 1. Plus γ_t est faible, plus la préférence pour le présent est élevée.

1. On obtient cette approximation en effectuant le développement limité d'ordre 1 de la fonction $f(x, y) = (x - y)/(1 + y)$ au voisinage de $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

TABLEAU 1.3 – Taux d'intérêt réel

Année	Période t	Intérêt annuel i_t	Inflation annuelle π_t	Intérêt réel r_t	Approximation $i_t - \pi_t$	Intérêt cumulé $\hat{r}_t$	Facteur d'actualisation β'_t
2000	1	2.63%	1.69%	0.92%	0.93%	0.92%	0.991
2001	2	3.00%	1.66%	1.31%	1.34%	2.24%	0.978
2002	3	3.00%	1.92%	1.05%	1.08%	3.32%	0.968
2003	4	2.69%	2.08%	0.60%	0.61%	3.94%	0.962
2004	5	2.25%	2.13%	0.12%	0.12%	4.07%	0.961
2005	6	2.15%	1.81%	0.33%	0.33%	4.41%	0.958
2006	7	2.44%	1.64%	0.79%	0.80%	5.23%	0.950
2007	8	2.90%	1.49%	1.39%	1.41%	6.69%	0.937
2008	9	3.67%	2.81%	0.83%	0.85%	7.58%	0.930
2009	10	1.92%	0.09%	1.82%	1.82%	9.54%	0.913
2010	11	1.46%	1.53%	-0.07%	-0.07%	9.46%	0.914
2011	12	2.08%	2.12%	-0.04%	-0.04%	9.42%	0.914
2012	13	2.25%	1.96%	0.29%	0.29%	9.74%	0.911
2013	14	1.58%	0.86%	0.71%	0.72%	10.52%	0.905
2014	15	1.15%	0.50%	0.64%	0.64%	11.23%	0.899

Source : Taux d'intérêt réel du livret A.

Ce concept nous permettra de simplifier l'écriture d'une fonction d'utilité intertemporelle en la mettant sous la forme suivante :

$$U = \sum_{t=1}^{T} \gamma_t U_t.$$

en raisonnant par analogie avec les taux d'escompte que nous avons vu, on peut définir le taux de préférence pour le présent, noté ϕ_t, de la manière suivante :

$$\gamma_t = \frac{1}{1+\phi_t}.$$

CHAPITRE 2

Les ménages

Ce chapitre est consacré aux décisions intertemporelles des ménages ou consommateurs. Nous examinons, dans un premier temps, comment les ménages utilisent l'épargne et l'emprunt, pour déplacer leurs consommations dans le temps. Puis nous examinerons leur offre de travail. Dans chaque cas nous distinguerons une situation avec deux périodes et une situation avec un nombre indéterminé de périodes.

2.1 Rappels : le cas statique

Nous allons d'abord examiner les fonctions de demande dans le cas de deux biens quelconques, avant d'introduire l'arbitrage consommation-loisirs. Le premier rappel servira pour étudier les décisions de consommation d'un bien sur deux périodes ; le second rappel sert à réviser les résultats sur l'offre de travail. Dans cette section, nous supposerons qu'il n'y a qu'une période.

Revenu exogène. Pour ce premier rappel, on considère que le menage perçoit un revenu fixe R, et qu'il doit juste l'allouer entre deux biens. Le premier bien est consommé en quantité x_1 et le second bien en quantité x_2. Les prix respectifs des deux biens sont notés p_1 et p_2 et le revenu R. La dépense totale de consommation doit donc vérifier la contrainte budgétaire suivante :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R$$

Afin de choisir les quantités des biens 1 et 2, le ménage se base sur ses préférences résumées par la fonction d'utilité $u(x_1, x_2)$. Elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x_g}(x_1, x_2) > 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_g^2}(x_1, x_2) < 0,\ g = 1, 2$$

La première condition pose que l'utilité est croissante par rapport à tous ses arguments. C'est une convention, pas une hypothèse. En effet, si une quantité affectait négativement l'utilité, il suffirait de réécrire cette utilité par rapport à une fonction décroissante de cette quantité, pour que l'utilité soit croissante par rapport à cette fonction. On peut donc toujours écrire une utilité comme une fonction croissante par rapport à tous ses arguments.

La seconde condition impose la décroissance de l'utilité marginale. Chaque unité supplémentaire consommée accroît moins l'utilité que l'unité consommée avant elle. Il s'agit d'une hypothèse importante pour la maximisation de l'utilité.

On suppose donc que le consommateur cherche à maximiser son utilité sous contrainte de budget. On peut résoudre ce problème par la méthode du Lagrangien. Il est défini par :

$$\mathscr{L}(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - R),\ \lambda \geq 0$$

où λ est le multiplicateur de Kuhn et Tucker. On note $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ la solution du programme du consommateur. Ils s'agit des demandes walrasiennes des biens ou services 1 et 2. Les conditions du premier ordre sont données par :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(\tilde{x}) - \lambda p_1 = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\tilde{x}) - \lambda p_2 = 0,\ \lambda(p_1 \tilde{x}_1 + p_2 \tilde{x}_2 - R) = 0$$

Les deux premières égalités permettent d'établir que $\lambda > 0$. Pour cela il suffit que l'utilité marginale soit positive pour au moins un bien ou service ($\exists g : \partial u / \partial x_g(\tilde{x}) > 0$). En effet, supposons que la contrainte budgétaire ne soit pas saturée. Ceci signifie que le ménage a encore de l'argent à dépenser. S'il existe un bien qui lui procure encore de l'utilité, il peut l'accroître en dépensant l'argent qui lui reste pour consommer ce bien. Donc on ne peut être au maximum d'utilité que lorsque tout le revenu est dépensé. Techniquement, on a $\lambda > 0$. On peut donc réécrire les conditions du premier ordre de la manière suivante :

$$\lambda > 0 \Rightarrow \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}(\tilde{x}) = \frac{p_1}{p_2} \text{ et } p_1 \tilde{x}_1 + p_2 \tilde{x}_2 = R$$

La quantité

$$\mathrm{TMS}_{12}(x) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)}$$

définit le taux marginal de substitution du ménage. Comme $\partial u / \partial x_g$ représente la valorisation d'une unité de bien g par le ménage, $\mathrm{TMS}_{12}(x)$ représente le nombre d'unités de bien 2 qu'il faut donner au ménage pour compenser la perte d'une unité de bien 1. Il s'agit donc d'un taux d'échange : le ménage accepterait TMS12(x) unités de bien 2 en échange d'une unité de bien 1. Ce taux varie avec les consommations déjà effectuée x parce que les utilités marginales des deux biens sont décroissantes.

Selon la condition du premier ordre, au maximum d'utilité, le TMS doit être égal au rapport des prix. Le taux d'échange du consommateur doit être égal à celui du marché. Si TMS12$(x) > p_1 / p_2$ ce que le consommateur est prêt à offrir pour une unité de bien 1 est supérieur au prix relatif du bien 1, donc le consommateur augmente sa consommation de bien 1. Ce faisant il réduit l'utilité marginale du bien 1 et le TMS12, de sorte qu'il se rapproche du rapport des prix. De même si TMS12$(x) < p_1 / p_2$, le consommateur a intérêt à réduire sa consommation de bien 1, ce qui a pour effet d'augmenter TMS12. Le consommateur ne change plus ses décision quand le TMS est égal au rapport des prix. On peut utiliser les relations précédentes pour résoudre le problème du consommateur.

Exemple 2.1. *Considérons une utilité de type Cobb-Douglas, de la forme*

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},$$

comme une fonction d'utilité est définie à une fonction croissante près, on utilise la transformation logarithmique, ce qui donne la fonction d'utilité :

$$u(x_1, x_2) = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2,\ \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

cette fonction est croissante par rapport à tous ses arguments puisque

$$\frac{\partial u}{\partial x_g} = \frac{\alpha_g}{x_g} > 0$$

et les utilités marginales sont bien décroissantes puisque

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_g^2} = -\frac{\alpha_g}{x_g^2} < 0.$$

On en déduit que le TMS est égal à :

$$\text{TMS}_{12} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{x_2}{x_1}$$

il est croissant avec la préférence pour le bien 1 par rapport au bien 2 ($\alpha_1/\alpha 2$) et avec la rareté du bien 1 par rapport au bien 2 dans les consommations du ménage (x_2/x_1). Plus le bien 2 est abondant, plus le bien 1 aura de valeur aux yeux du ménage. Cette dernière propriété vient de la décroissance de l'utilité marginale, plus un bien est rare dans le panier de consommations d'un ménage plus il est désiré, toutes choses égales par ailleurs. Le ménage maximise son utilité lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1} = \frac{p_1}{p_2} \tag{2.1a}$$

$$p_1 \tilde{x}_1 + p_2 \tilde{x}_2 = R \tag{2.1b}$$

en utilisant la relation (2.1a) *on obtient* $p_2 \tilde{x}_2 = \alpha_2 p_1 \tilde{x}_1 / \alpha_1$, *que l'on reporte dans* (2.1b) *pour obtenir :*

$$\frac{p_1 \tilde{x}_1}{R} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

la part du bien 1 dans la dépense du ménage (i.e. le coefficient budgétaire du bien 1) est égal à la part du bien 1 dans les préférences du ménage, ce qui est équivalent à :

$$\tilde{x}_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{R}{p_1}$$

la demande de bien 1 est égale à la part du bien 1 dans les préférences du ménage multipliée par le pouvoir d'achat du ménage en bien 1, défini comme le nombre d'unités de bien 1 que le ménage peut acheter avec son revenu (R/p_1). En reportant cette valeur dans la relation (2.1a) *on obtient :*

$$\tilde{x}_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{p_1 \tilde{x}_1}{p_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{R}{p_2},$$

qui s'interprète de la même manière que $\tilde{x}_1$.

Avec revenu endogène. Dans la section précédente, on fait l'hypothèse que le ménage perçoit un revenu R sans expliquer d'où il vient. Maintenant, nous allons supposer que le ménage retire un revenu de son travail. On représente cette situation dans laquelle le ménage dispose d'un certain temps disponible dont il doit sacrifier une partie pour gagner un revenu qui lui permettra de consommer. Nous noterons x le temps de loisirs et c la quantité consommée. Le prix du bien de consommation est noté p et le salaire horaire w. Pour définir le temps de travail, on introduit le temps total disponible du ménage $\bar{x}$. Il s'agit d'une ressource du ménage, qu'il peut décider d'utiliser pour travailler ou pour ses loisirs. Ce temps n'inclut généralement pas le temps de sommeil, etc. mais uniquement le temps que l'on peut librement consacrer au travail ou aux loisirs, une fois retiré les autres temps indispensables à la vie du ménage. Le temps de travail est défini par le temps disponible que l'on ne consacre pas aux loisirs : $\ell = \bar{x} - x$. La fonction d'utilité comporte deux arguments : la consommation c et les loisirs x, on la note $u(c, x)$. Elle vérifie la convention de croissance par rapport à tous ses arguments :

$$\frac{\partial u}{\partial c} > 0,\ \frac{\partial u}{\partial x} > 0$$

et de décroissance de l'utilité marginale de la consommation et des loisirs :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c^2} < 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0.$$

La contrainte budgétaire doit tenir compte du fait que le revenu est endogène. On a :

$$pc \leq M \text{ avec } M \triangleq w\ell$$

la dépense de consommation est inférieure au revenu salarial $M = w\ell$. Cette manière d'écrire la contrainte budgétaire n'est toutefois pas la plus pratique pour résoudre le programme du ménage car les membres de gauche et de droite de l'inégalité sont endogènes. Par la suite nous regrouperons les variables endogènes à gauche de l'inégalité, ce qui donne :

$$pc + wx \leq w\bar{x} \triangleq R \tag{2.2}$$

et nous appelerons R les ressources du ménage. Elles se définissent comme le revenu maximum que le ménage pourrait gagner s'il consacrait tout son temps disponible au travail ; le temps est donc une ressource. Ce revenu est utilisé de deux manières : la consommation, pour un montant pc et les loisirs, pour un montant wx. En fait wx est ce que l'on appelle le *coût d'opportunité des loisirs*. Il s'agit du revenu que l'on perd en renoncant à travailler pendant x heures, donc prenant x heures de loisirs. Tout se passe comme si le ménage disposait de ressources R qu'il doit répartir entre la consommation (pc) et les loisirs (wx). Ici, le travail ne sert qu'à consommer, on peut donc voir l'inégalité précédente comme une répartition des ressources en termes de temps entre le travail, qui sert à obtenir pc en consommation et les loisirs (wx).

Le ménage cherche à maximiser son utilité sous la contrainte de ressources (2.2). Le Lagrangien est défini par :

$$\mathscr{L}(c, x) = u(c, x) - \lambda(pc + w\ell - R),$$

où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur de Khun et Tucker. On obtient les conditions du premier ordre suivantes :

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c}(\tilde{c}, \tilde{x},) = 0,\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(\tilde{c}, \tilde{x}) = 0,\ \lambda(\,p\tilde{c} + w\tilde{x} - R) = 0 \tag{2.3}$$

On en déduit les conditions suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial c}(\tilde{c},\tilde{x}) = \lambda p,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{c},\tilde{x}) = \lambda w,\ \lambda(p\tilde{c} + w\tilde{x} - R) = 0$$

il suffit que $\partial u/\partial c(\tilde{c},\tilde{x}) > 0$ ou que $\partial u/\partial x(\tilde{c},\tilde{x}) > 0$ pour que $\lambda > 0$, ce qui implique que la contrainte budgétaire est satisfaite à l'égalité. La raison économique est la suivante : s'il restait des ressources inemployées, on pourrait soit augmenter sa consommation si $\partial u/\partial c(\tilde{c},\tilde{x}) > 0$ et augmenter son utilité, soit réduire son temps de travail (i.e. accroître son temps de loisirs) si $\partial u/\partial x(\tilde{c},\tilde{x}) > 0$ et augmenter son utilité. Donc, à l'optimum toutes les ressources sont utilisées soit en consommation soit en loisirs. On en déduit des conditions similairesà celles de la section précédente :

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{c},\tilde{x})}{\frac{\partial u}{\partial c}(\tilde{c},\tilde{x})} = \frac{w}{p} \text{ et } p\tilde{c} + w\tilde{x} = R$$

la première relation définit les quantités relatives de biens et de loisirs que souhaite consommer le ménage, la seconde relation fixe le montant absolu qui sera dépensé. On en déduira les quantités absolues de consommation et de loisirs. Pour interpréter la condition d'arbitrage consommation-loisirs, on introduit le taux marginal de substitution loisirs-consommation :

$$\mathrm{TMS}_{x,c}(c,x) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(c,x)}{\frac{\partial u}{\partial c}(c,x)}$$

il donne le nombre d'unités de consommation qu'il faut donner au ménage pour qu'il renonce à une heure de loisirs. Il s'agit du prix subjectif des loisirs. A l'optimum ce prix subjectif doit être égal au salaire réel w/p. En effet, le salaire réel est le nombre d'unités de biens (de prix p) que l'on peut acheter en travaillant une heure (avec w). Il s'agit du prix objectif des loisirs. A l'optimum le prix subjectif des loisirs doit être égal au prix objectif des loisirs.

Supposons que le $\mathrm{TMS}_{x,c}$ loisirs-consommation soit supérieur au salaire réel, cela signifie que le nombre d'unités de consommation que le consommateur exige pour travailler une heure de plus (i.e. pour prendre une heure de loisirs en moins) est plus élevé que ce que le marché lui offre (w/p) ; il est donc incité à réduire son temps de travail, et en augmentant sont temps de loisirs il diminue son $\mathrm{TMS}_{x,c}$. De même, si le $\mathrm{TMS}_{x,c}$ loisirs-consommation est inférieur au salaire réel, le marché offre au ménage plus de biens de consommation qu'il ne demande pour travailleur une heure de plus ; donc il travaille plus ce qui réduit ses loisirs et augmente le $\mathrm{TMS}_{x,c}$. Quand le ménage procède à son arbitrage consommation-loisirs, le TMS se rapproche toujours du salaire réel w/p. A l'optimum, le prix subjectif des loisirs est égal au salaire réel de marché. Ce résultat est obtenu pour *tous* les ménages, quelles que soient leurs préférences.

Exemple 2.2. *Considérons l'utilité de Cobb-Douglas suivante :*

$$u(c,x) = \alpha_c \ln c + \alpha_x \ln x,\ \alpha_c, \alpha_x > 0$$

le taux marginal de substitution loisirs-consommation est donné par :

$$\mathrm{TMS}_{x,c}(c,x) = \frac{\alpha_x}{\alpha_c}\frac{c}{x}$$

il est croissant avec la préférence relative pour les loisirs (α_x/α_c) et avec la rareté des loisirs par rapport à la consommation (c/x). A l'optimum, le TMS loisirs-consommation est égal au salaire réel :

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_c}\frac{c}{x} = \frac{w}{p} \Leftrightarrow w\tilde{x} = \frac{\alpha_x}{\alpha_c}p\tilde{c}$$

que l'on reporte dans la contrainte de ressources :

$$p\tilde{c} + w\tilde{x} = R \Leftrightarrow \frac{p\tilde{c}}{R} = \frac{\alpha_c}{\alpha_c + \alpha_x}$$

la part de la consommation dans les ressources du ménage est égale à la part de la consommation dans les préférences du ménage. Ceci est équivalent à la demande de consommation suivante :

$$\tilde{c} = \frac{\alpha_c}{\alpha_c + \alpha_x}\frac{R}{p}$$

elle est donnée par le produit de la part de la consommation dans les préférences par le nombre d'unités de bien que l'on peut acheter avec les ressources R. Le premier coefficient est compris entre 0 et 1, et R/p est la dépense maximale possible en biens de consommation. La part dans les préférences indique donc la part de la dépense maximale que le ménage veut effectuer.

Le coût d'opportunité des loisirs se déduit de la contrainte budgétaire :

$$\frac{w\tilde{x}}{R} = 1 - \frac{p\tilde{c}}{R} = \frac{\alpha_x}{\alpha_c + \alpha_x},$$

il s'agit de la part des loisirs dans les préférences du ménage. La demande de loisirs est donc égale à :

$$\tilde{x} = \frac{\alpha_x}{\alpha_c + \alpha_x}\frac{R}{w}$$

et l'on retrouve cette fois ci le produit de la part des loisirs dans les préférences par la durée maximale de loisirs que l'on peut prendre avec des ressources R. Tout se passe donc comme si on achetait $\tilde{x}$ heures de loisirs au prix w. On en déduit l'offre de travail du ménage :

$$\tilde{\ell} = \bar{x} - \tilde{x} = \bar{x} - \frac{\alpha_x}{\alpha_c + \alpha_x}\frac{R}{w} = \frac{\alpha_c}{\alpha_c + \alpha_x} \times \bar{x}$$

en remarquant que $R/w = \bar{x}$. L'offre de travail est donc entièrement motivée par la consommation. La part du temps disponible que l'on consacre au travail, $\tilde{\ell}/\bar{x}$ est égale à la part de la consommation dans les préférences du ménage.

2.2 Consommation et épargne

Dans cette section nous considérerons que le revenu est exogène. Nous nous focaliserons donc sur les choix de consommation. Le consommateur peut désormais utiliser l'épargne pour déplacer une consommation vers l'avenir, et l'emprunt pour déplacer une consommation vers le présent.

La contrainte budgétaire intertemporelle. Dans un premier temps, nous considérons que les revenus des ménages sont donnés et connus en début de période ($t = 1$). Au début de la période 1 le ménage dispose d'un revenu R_1 qu'il peut épargner ou dépenser en biens de consommation. De même, le ménage peut emprunter de l'argent pour consommer plus en première période ; dans ce cas il devra rembourser son prêt en seconde période. Pour simplifier on suppose que le taux d'intérêt sur les emprunts (i.e., le taux d'intérêt débiteur) est égal au taux d'intérêt qui rémunère les prêts (i.e., le taux d'intérêt créditeur). Donc un emprunt est représenté par une épargne négative. On note E_1 l'épargne de la période 1. Les ressources de la période 1 vérifient l'égalité comptable :

$$R_1 = p_1 c_1 + E_1 \tag{2.4}$$

où p_1 est le prix du bien de consommation en première période et c_1 la quantité consommée. Si $E_1 > 0$, cette égalité signifie que le revenu R_1 est soit consommé pendant la période 1, pour un montant $p_1 C_1$ soit épargné, pour un montant E_1. Si $E_1 < 0$, on réécrit la contrainte sous la forme $R_1 + (-E_1) = p_1 c_1$ qui signifie que la somme du revenu et de l'emprunt sont consommés en première période. On remarque qu'un emprunt ou une épargne n'ont pas de sens en seconde période, parce que l'économie s'arrête.

En seconde période, le ménage perçoit un revenu R_2. Ce revenu est modifié par les décisions d'épargne et d'emprunt de première période. Si le ménage a épargné un montant R_1, il perçoit le capital et les intérêts au début de la seconde période. Le revenu au début de la seconde période devient alors $R_2 + (1 + i_1)E_1$ et ce montant doit couvrir les dépenses de consommation de seconde période $p_2 c_2$, où p_2 est le prix du bien en seconde période et c_2 la quantité consommée. On a donc :

$$p_2 c_2 \leq R_2 + (1 + i_1)E_1 \tag{2.5}$$

Si le consommateur a emprunté en première période, sont revenu est égal à R_2 et il doit rembourser son emprunt avec les intérêts, pour un montant $(1+i_1)(-E_1) > 0$ et consommer $p_2 c_2$, ce qui donne la même contrainte que précédemment $(1+i_1)(-E_1)+p_2 c_2 \leq R_2$. Les deux contraintes budgétaires peuvent être consolidées car le ménage peut placer son argent et emprunter librement, dans les limites de sa solvabilité sur l'ensemble des deux périodes. En utilisant l'équation (2.4) on obtient l'expression de l'épargne :

$$E_1 = R_1 - p_1 c_1$$

que l'on reporte dans l'équation (2.5), ce qui donne :

$$p_2 c_2 \leq R_2 + (1 + i_1)(R_1 - p_1 c_1)$$

on peut alors réarranger les termes en mettant les dépenses d'un côté ($p_1 c_1$ et $p_2 c_2$) et les revenus de l'autre (R_1 et R_2), on obtient finalement la *contrainte budgétaire intertemporelle* :

$$p_1 c_1 + \frac{p_2 c_2}{1 + i_1} \leq R_1 + \frac{R_2}{1 + i_1} \tag{2.6}$$

Le membre de droite de cette contrainte est simplement la somme actualisée des revenus, pour des valeurs observées en début de période. On utilise donc les facteurs d'actualisation $\beta_1 = 1$, car un € de la période 1 vaut un € de la période 1, et $\beta_2 = 1/(1 + i_1)$ car un € de début de période 2 peut être placé pendant la période 1 et rapporter un intérêt $1+i_1$. La quantité suivante est appelée la *richesse* du ménage :

$$W \triangleq R_1 + \frac{R_2}{1+i_1} = \beta_1 R_1 + \beta_2 R_2 \tag{2.7}$$

La contrainte budgétaire intertemporelle (2.2) signifie simplement que la somme des dépenses de consommation actualisées ne doit pas dépasser la richesse. Comme les emprunts et les placements sont libres, une seule contrainte suffit. Cette contrainte budgétaire garantit également que le ménage est solvable. On peut simplifier l'expression de la contrainte de richesse en introduisant des *prix actualisés*. Le prix actualisé du bien à la date t est défini par :

$$\rho_t = \beta_t \times p_t,\ t \in \{1,2\}$$

ce qui donne concrètement $\rho_1 = p_1$ et $\rho_2 = p_2/(1+i_1)$. Il s'agit simplement du prix du bien ramené en unités monétaires de la première période. Avec cette convention, on peut réécrire la contrainte budgétaire intertemporelle sous la forme suivante :

$$\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 \leq W \tag{2.8}$$

On remarque qu'avec l'écriture (2.8) la contrainte budgétaire intertemporelle est similaire à la contrainte budgétaire du modèle à une période, dans laquelle on aurait remplacé les prix courants par les prix actualisés et le revenu par la richesse.

Dans ce modèle le rôle de l'épargne est simplement de transférer une consommation du présent vers le futur, et le rôle de l'emprunt de transférer une consommation du futur vers le présent. Il y a trois causes possibles à ces transferts : les préférences des consommateurs, la variation des prix des biens dans le temps et la répartition des revenus dans le temps.

Les préférences du ménage. Les préférences du ménage portent sur les consommations du bien pendant les deux périodes, $c_1$et c_2. Ces préférences sont supposées représentées par une fonction d'utilité intertemporelle $U(c_1, c_2)$. Comme il n'y a qu'un bien et deux périodes, ces préférences portent nécessairement sur la préférence pour le présent (ou pour l'avenir) du ménage. Certains ménages peuvent préférer consommer en période 1, d'autres en période 2. Cette fonction d'utilité est définie à une fonction croissante près et vérifie les propriétés habituelles. Premièrement, U est croissante par rapport aux consommations des deux périodes (i.e. les utilités marginales sont positives) :

$$\frac{\partial U}{\partial c_t}(c_1, c_2) \geq 0\ \forall t \in \{1,2\}$$
$$\exists t \in \{1,2\} : \frac{\partial U}{\partial c_t}(c_1, c_2) > 0$$

la seconde conditions signifie qu'il existe au moins un bien pour lequel il n'y a pas de satiété ; elle garantit la saturation de la contrainte budgétaire. Deuxièmement, les utilités marginales sont décroissantes, ce qui revient à dire que la fonction d'utilité est concave :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial c_t^2}(c_1, c_2) < 0\ \forall t \in \{1,2\}.$$

A partir des utilités marginales on définit le taux marginal de substitution, noté TMS_{12}, comme le nombre d'unités de la période 2 qu'il faut pour compenser la perte d'une unité de la période 1 :

$$\text{TMS}_{12}(c_1, c_2) = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial c_1}(c_1, c_2)}{\dfrac{\partial U}{\partial c_2}(c_1, c_2)}$$

ce taux est diretement relié à la préférence pour le présent : plus le TMS_{12} est élevé, plus la préférence pour le présent est élevée.

Exemple 2.3. *Pour obtenir des résultat explicites, on utilise souvent les fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas. Elle est définie par :*

$$c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2}$$

Pour simplifier les calculs, on préfère prendre son logarithme car une fonction d'utilité est définie à une fonction croissante près. On a :

$$U(c_1, c_2) = \ln\left(c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2}\right) = \alpha_1 \ln c_1 + \alpha_2 \ln c_2, \;\; \alpha_1, \; \alpha_2 > 0$$

cette fonction est croissante par rapport à ses deux arguments :

$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = \frac{\alpha_1}{c_1} > 0$$
$$\frac{\partial U}{\partial c_2} = \frac{\alpha_2}{c_2} > 0$$

et concave. Pour voir ce dernier point, examinons la matrice hessienne :

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial c_1^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial c_1 \partial c_2} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial c_2 \partial c_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial c_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\alpha_1}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\alpha_2}{c_2^2} \end{pmatrix}$$

elle est clairement définie négative donc la fonction est concave. Sur le plan théorique, cela signifie que les utilités marginales sont décroissante ; les première unités consommées procurent plus de satisfaction que les dernières.

Le programme du ménage. On suppose que le ménage cherche à maximiser l'utilité de ses consommations sur l'ensemble des deux périodes, d'où le programme :

$$\max_{c_1, c_2} U(c_1, c_2)$$
$$s.c. \; \rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 \leq W$$

auquel correspond le lagrangien :

$$\mathscr{L} = U(c_1, c_2) - \lambda(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 - W), \; \lambda \geq 0$$

où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur de Khun et Tucker. Le point qui maximise l'utilité est noté $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$. Il s'agit des demandes walrasiennes et on les obtient par les conditions suivantes d'optimalité :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_1}(\tilde{c}) &= \frac{\partial U}{\partial c_1}(\tilde{c}) - \lambda \rho_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_2}(\tilde{c}) &= \frac{\partial U}{\partial c_2}(\tilde{c}) - \lambda \rho_2 = 0 \\
\lambda(\rho_1 \tilde{c}_1 + \rho_2 \tilde{c}_2 - W) &= 0
\end{aligned}$$

en examinant les deux premières équations, on voit qu'il suffit qu'il n'y ait pas de satiété sur la consommation d'une des deux périodes ($\exists t \in 1,2 : \partial U / \partial c_t > 0$) pour que la contrainte de richesse soit saturée ($\lambda > 0$). En effet, s'il n'y a pas de satiété et s'il reste des revenus à dépenser, le ménage peut augmenter son utilité en consommant plus. Il finit donc par consommer toute sa richesse, ce qui nous laisse la question de l'allocation de cette richesse entre les deux périodes. Le système se réécrit :

$$\frac{\partial U}{\partial c_1}(\tilde{c}) = \lambda \rho_1 \tag{2.9a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial c_2}(\tilde{c}) = \lambda \rho_2 \tag{2.9b}$$

$$\rho_1 \tilde{c}_1 + \rho_2 \tilde{c}_2 = W \tag{2.9c}$$

Cette allocation est obtenue en utilisant le ratio des deux premières équations, (2.9a) / (2.9b). On obtient :

$$\mathrm{TMS}_{12}(c_1, c_2) = \frac{\rho_1}{\rho_2} \tag{2.10}$$

Le membre de gauche est le taux marginal de substitution, il représente le taux d'échange subjectif d'une consommation à la période 1 exprimé en nombre d'unités de consommation de la période 2. Nous verrons plus loin que cette quantité est implicitement *actualisée* au sens des fonctions d'utilité. Le membre de droite est le rapport des prix actualisés des deux biens ; il s'agit du taux d'échange objectif (i.e. de marché) donnant le nombre d'unités de bien de la période 2 que l'on peut acheter avec une unité de bien de la période 1. [1] Cette relation résume l'arbitrage entre les consommations des deux périodes. Si le TMS est supérieur au rapport des prix actualisé, ceci signifie que le ménage est prêt à payer plus que le prix de marché pour consommer en première période, et il est incité à accroître sa consommation en première période ; cet accroissement de consommation réduit son utilité marginale de la consommation en première période et le TMS se rapproche du rapport des prix. Si le TMS est inférieur au rapport des prix actualisés, le ménage est prêt à payer moins que le prix de marché pour consommer en première période, donc il déplace sa consommation en seconde période. Cette baisse de consommation première période augmente l'utilité marginale de la consommation en première période et donc le TMS, qui se rapproche du rapport des prix. Le consommateur ne change plus ses plans de consommation quand le TMS est égal au rapport des prix actualisés.

La manière classique pour résoudre ce programme est la suivante. On remarque tout d'abord que sous les hypothèses usuelles la contrainte budgétaire est toujours saturée ($\lambda > 0$). On utilise

1. Si le bien de la période 1 vaut $\rho_1 = 5$ et le bien de la période 2 vaut $\rho_2 = 2.5$, on peut acheter $\rho_1/\rho_2 = 2$ unités de bien de la période 2 avec une unité de bien de la période 1.

(2.9a) et (2.9b) pour exprimer $\tilde{c}1$ et $\tilde{c}_2$ en fonction des prix et de λ. On reporte leurs expressions dans la contrainte budgétaire saturée, ce qui donne λ en fonction de la richesse et des prix. On reporte ensuite cette valeur de λ pour obtenir $\tilde{c}$.

Exemple 2.4. *Considérons le cas d'une utilité de type Cobb-Douglas, exprimée en logarithmes :*

$$U(c_1, c_2) = \alpha_1 \ln c_1 + \alpha_2 \ln c_2$$

on vérifie que cette fonction est croissante et concave ($\forall t$, $\partial U/\partial c_t = \alpha_t/c_t > 0$ et $\partial^2 U/\partial c_t^2 = -\alpha_t/c_t^2 < 0$). Le Lagrangien s'écrit donc :

$$\mathscr{L} = \alpha_1 \ln c_1 + \alpha_2 \ln c_2 - \lambda(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 - W)$$

ce qui donne les conditions du premier ordre suivantes :

$$\frac{\alpha_1}{\tilde{c}_1} = \lambda \rho_1 \quad (2.11a)$$

$$\frac{\alpha_2}{\tilde{c}_2} = \lambda \rho_2 \quad (2.11b)$$

$$W = \rho_1 \tilde{c}_1 + \rho_2 \tilde{c}_2 \quad (2.11c)$$

des équations (2.11a) *à* (2.11b) *on retire :*

$$\rho_1 \tilde{c}_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda} \quad (2.12a)$$

$$\rho_2 \tilde{c}_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda} \quad (2.12b)$$

que l'on reporte dans la contrainte de richesse (2.11c)*. On obtient alors :*

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda} = W \Leftrightarrow \lambda = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{W},$$

l'utilité marginale de la richesse à l'optimum est décroissante avec la richesse ; c'est une conséquence de la décroissance de l'utilité marginale. On reporte cette expression de λ dans les relations (2.12a) *et* (2.12b)*, ce qui donne les consommations optimales suivantes :*

$$\tilde{c}_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{W}{\rho_1} \text{ et } \tilde{c}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{W}{\rho_2}$$

Le coefficient $\alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2)$ représente la préférence pour une consommation à la période 1 par rapport à la période 2. Il mesure donc la préférence pour le présent. Le coefficient $\alpha_2/(\alpha_1 + \alpha_2) = 1 - \alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2)$ représente donc la préférence pour une consommation future.

La quantité W/ρ_t représente le nombre d'unités de biens de la période t que l'on peut acheter avec la richesse W. Ce point est important car il implique le principe du revenu permanent. La consommation de la période t ne dépend pas simplement du revenu de la période t mais de la richesse calculée sur l'ensemble des périodes de consommation. Les fonctions de demandes dépendent donc du pouvoir d'achat du consommateur à chaque période (W/ρ_t) et de ses préférences temporelles de consommation $\alpha_t/(\alpha_1 + \alpha_2)$. Plus un ménage préfère consommer à une période donnée plus sa demande sera élevée à cette période, et plus son pouvoir d'achat sera élevé à certaines périodes plus sa demande sera élevée à ces périodes. Les deux phénomènes peuvent également se compenser. Un consommateur qui préfère consommer aujourd'hui ($t = 1$) plutôt que demain ($t = 2$) pourra décider de consommer plus demain qu'aujourd'hui si les prix sont *très élevés aujourd'hui. Par contre, la répartition des revenus ne joue pas sur les décisions de consommation. Comme le consommateur peut prêter et emprunter, il peut déplacer ses revenus d'une période à l'autre de sorte que leur répartition dans le temps est neutre. C'est le principe du revenu permanent.*

On peut réécrire les relations (2.4) *de la manière suivante :*

$$\frac{\rho_1 \tilde{c}_1}{W} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \text{ et } \frac{\rho_2 \tilde{c}_2}{W} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Les membres de gauche représentent les parts de la richesse que l'on consomme repectivement en première et seconde période. Les membres de droite représente les préférences pour le présent et pour le futur. Le ménage consomme donc, à chaque période, une part de la richesse égale au poids de la période dans ses préférences.

Avec utilité actualisée. Jusqu'à présent, nous n'avons actualisé que les dépenses. Or la relation (2.10) établit une égalité entre le rapport des utilités marginales et le rapport des prix actualisés. Nous allons voir que l'on peut considérer que les utilités marginales sont elles-mêmes actualisées. Considérons le problème de départ : on dispose d'un seul bien donc il est logique de supposer qu'il procure *a priori* la même utilité à toutes les dates. Notons $u(c)$ cette fonction d'utilité. Si maintenant, nous voulons rendre compte d'une préférence pour une période de consommation donnée (t), il suffit de lui affecter un facteur d'actualisation γ_t, avec la convention $\gamma_1 = 1$ car on prend la première période comme référence. La fonction d'utilité intertemporelle prend alors la forme suivante :

$$U(c_1, c_2) = \gamma_1 u(c_1) + \gamma_2 u(c_2),$$

avec cette formulation, tout se passe comme si on additionnait les utilités actualisées des différentes périodes, comme pour les montants monétaires. Ainsi les utilités marginales s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = \gamma_1 u'(c_1) \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial U}{\partial c_2} = \gamma_2 u'(c_2) \tag{2.14}$$

et le TMS se réécrit :

$$\text{TMS}_{12}(c_1, c_2) = \frac{\gamma_1 u'(c_1)}{\gamma_2 u'(c_2)} \tag{2.15}$$

le rapport des utilités marginales actualisées. On peut donc réécrire la relation (2.10) sous la forme suivante, en utilisant (2.2) :

$$\frac{\gamma_1 u'(c_1)}{\gamma_2 u'(c_2)} = \frac{\beta_1 p_1}{\beta_2 p_2}, \tag{2.16}$$

le rapport des utilités marginales actualisées est égal au rapport des prix actualisés.

Exemple 2.5. *La fonction de Cobb-Douglas* (2.3) *usuelle s'écrit :*

$$U(c_1, c_2) = \alpha_1 \ln c_1 + \alpha_2 \ln c_2$$

il suffit donc de prendre $u(c) = lnc$ *comme fonction d'utilité pour chaque période, et on obtient :*

$$U(c_1, c_2) = \gamma_1 \ln c_1 + \gamma_2 \ln c_2$$

Les fonctions de demande s'écrivent donc de la même manière avec $\alpha_t = \gamma_t$. Quand il s'agit du même bien dans le temps, les élasticités de la fonction d'utilité (γ_t) représentent la préférence pour la période t. Les demandes peuvent donc s'écrire simplement :

$$\tilde{c}_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{W}{\rho_1} \text{ et } \tilde{c}_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{W}{\rho_2}$$

en posant le taux de préférence pour le présent égal à $g_1 = \gamma_1 / (\gamma_1 + \gamma_2)$, on obtient :

$$\tilde{c}_1 = g_1 \times \frac{W}{\rho_1} \text{ et } \tilde{c}_2 = (1 - g_1) \times \frac{W}{\rho_2}$$

Avec inflation explicite. Pour l'instant nous avons raisonné avec un prix différent pour chaque période. Or, s'il s'agit du même bien, on peut étudier le taux de croissance du prix de ce bien, qui n'est autre que le taux d'inflation. Sachant que l'on raisonne sur des prix en début de période, on a la relation suivante :

$$\pi_1 = \frac{p_2 - p_1}{p_1} \Leftrightarrow p_2 = (1 + \pi_1) p_1.$$

que l'on peut rapprocher de la contrainte budgétaire :

$$p_1 c_1 + \frac{p_2 c_2}{1 + i_1} \leq R_1 + \frac{R_2}{1 + i_1}. \tag{2.17}$$

Considérons d'abord le membre de gauche, qui représente les dépenses. En utilisant la définition de l'inflation, on obtient :

$$p_1 c_1 + \frac{(1 + \pi_1) p_1 c_2}{1 + i_1} \tag{2.18}$$

or le taux d'intérêt réel est défini par :

$$1 + r_1 = \frac{1 + i_1}{1 + \pi_1}$$

on a donc une dépense totale égale à :

$$p_1 c_1 + \frac{p_1 c_2}{1 + r_1} = p_1 \left(c_1 + \frac{c_2}{1 + r_1} \right) \tag{2.19}$$

Une fois ramené en unités monétaires de la première période, le terme de gauche de la contrainte budgétaires intertemporelle est maintenant actualisé par le taux d'intérêt réel.

Considérons maintenant le membre de droite. On notera $\bar{R}_t$ le revenu réel de la période t. Par définition le revenu du début de la période 1 (i.e. de la date 0) n'est pas concerné par l'inflation donc $\bar{R}_1 = R_1$. Par contre, le revenu du début de la seconde période est affecté par l'inflation de la période 1 (au taux π_1). Le revenu *réel* de la période 2, c'est-à-dire le revenu ramené en unités monétaires de la période 1, est donc égal à

$$\bar{R}_2 = \frac{R_2}{1 + \pi_1} \Leftrightarrow R_2 = (1 + \pi_1) \bar{R}_2,$$

on obtient donc l'expression suivante pour le membre de droite de la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$R_1 + \frac{R_2}{1 + i_1} = \bar{R}_1 + \frac{(1 + \pi_1) \bar{R}_2}{1 + i_1} = \bar{R}_1 + \frac{\bar{R}_2}{1 + r_1}$$

on obtient également une valeur actualisée par le taux d'intérêt réel. Globalement, on a donc :

$$p_1\left(c_1 + \frac{c_2}{1+r_1}\right) \leq \bar{R}_1 + \frac{\bar{R}_2}{1+r_1} = W$$

On peut donc dire que la consommation actualisée réelle doit être inférieure ou égale à la richesse réelle car

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r_1} \leq \frac{W}{p_1}.$$

et que le taux d'actualisation à utiliser est le taux d'intérêt réel.

Modèle ricardien. Le fait que les demandes de consommation dépendent de la richesse permet d'illustrer ce que l'on appelle *l'équivalence ricardienne* ou *l'effet Ricardo-Barro*. Quand on effectue une dépense publique financée par emprunt, les ménages anticiperaient les impôts futurs à payer, de sorte que la dépense n'aurait pas d'impact sur la consommation des ménages, même à court terme. Les ménages préféreraient augmenter leur épargne, en prévision des hausses d'impôts futures. Ici, supposons qu'on augmente le revenu du ménage d'un montant A_1 en période 1 et qu'il doive rembourser $(1+i_1)A_1$ d'impôt en période 2. Sa richesse devient :

$$R_1 + A_1 + \frac{R_2 - (1+i_1)A_1}{1+i_1} = R_1 + A_1 + \frac{R_2}{1+i_1} - R_1 = R_1 + \frac{R_2}{1+i_1} = W$$

donc la richesse ne varie pas, ce qui implique que les consommations de toutes les périodes ne varient pas. Ceci implique aussi que l'épargne augmente en première période puisque le revenu augmente de A_1 et que la consommation ne varie pas. On dit que ce type de modèle est *ricardien*, du nom de l'économiste David Ricardo (1817, *Principes de l'économie politique et de l'impôt*). Pour atténuer cet effet dans un modèle comme celui ci, il faut introduire des générations de ménages afin de modifier son côté ricardien. Dans un modèle à générations, une première génération profite de la hausse des dépenses publiques et une autre génération rembourse les impôts. On peut donc avoir des effets à court terme sur la consommation (Benassy, 2007).

2.3 Consommation et emploi

La section précédente étudie les choix d'épargne-consommation en fonction d'un revenu donné. L'extension la plus immédiate de ce modèle est de rendre le revenu endogène. Dans la section précédente, les ménages perçoivent une suite de revenus $\{R_t\}$ dont l'origine n'est pas précisée. Dans cette section, la source du revenu est le travail. Le revenu est endogène puisqu'il dépend des décisions des ménages : plus leur temps de travail est élevé plus leur revenu est élevé, toutes choses égales par ailleurs. De plus, les ménages peuvent épargner et toucher des revenus du capital. Pour simplifier, nous allons supposer que tout le revenu que les ménages peuvent dépenser à chaque date vient de leur travail, qu'il soit passé (épargne), présent ou futur (emprunt).

Introduire le travail dans la problématique implique de changer la contrainte budgéraire et de modifier la représentation des préférences. Le temps de travail de chaque année modifie les revenus de chaque année et donc la richesse ; le fait de travailler crée aussi une désutilité. Introduire le travail permet de représenter des arbitrages plus riches. Entre épargne et consommation, mais aussi entre travail et loisirs, les deux arbitrage étant reliés. Si on prend plus de loisirs, on réduit son revenu, ce qui modifie la consommation et l'épargne.

Contrainte de richesse. Nous allons voir une manière particulière d'écrire la contrainte de richesse, celle des modèles d'équilibre général. Pour cela considérons la manière dont le travail intervient dans les décisions des ménages. Chaque ménage possède un temps disponible pour le travail ou les loisirs égal à $\bar{x}_t$ pour la période t. Ce temps représente un temps résiduel, une fois que l'on a éliminé le temps nécessaire au sommeil, aux repas etc.. Le temps qui reste peut être alloué soit au travail soit aux loisirs. Ce temps disponible peut varier dans le temps, par exemple selon l'état de santé à la période t. Au début de chaque période, le ménage doit décider combien de temps il consacre aux loisirs, noté x_t, et au travail, noté ℓ_t. Il doit respecter la contrainte de temps $\bar{x}_t = x_t + \ell_t$. Le temps de travail ℓ_t procure un revenu rémunéré au prix unitaire w_t, il s'agit du salaire horaire. Le salaire total est le revenu perçu par le ménage. Il est égal à :

$$M_t = w_t \ell_t,\ \forall t$$

et la consommation de la période t est notée c_t.

Pour écrire la contrainte de richesse, commençons par la première période. Le ménage perçoit un revenu $M_1 = w_1 \ell_1$ qu'il peut consommer, pour un montant $p_1 c_1$ ou placer pendant la première période au taux i_1. L'épargne est noté E_1 ; si elle est négative il s'agit d'un emprunt. La contrainte de revenu de la première période donne donc :

$$M_1 = p_1 c_1 + E_1 \Leftrightarrow E_1 = w_1 \ell_1 - p_1 c_1.$$

A la seconde période, le ménage peut consommer son revenu courant $M_2 = w_2 \ell_2$ et le produit de sont épargne $(1+i_1)E_1$. S'il a emprunté $(E_1 < 0)$ il doit rembourser son emprunt avec son revenu de seconde période M_2. Ceci donne la contrainte :

$$\begin{aligned} & p_2 c_2 \leq (1+i_1)E_1 + M_2 \\ & \quad \Leftrightarrow p_2 c_2 \leq (1+i_1)(w_1\ell_1 - p_1 c_1) + w_2 \ell_2 \\ & \quad \Leftrightarrow p_1 c_1 + \frac{p_2 c_2}{1+i_1} \leq w_1 \ell_1 + \frac{w_2 \ell_2}{1+i_1} \end{aligned}$$

le membre de gauche a déjà été vu dans la section précédente, il s'agit de la valeur actualisée de consommation (au taux i_1). Le membre de droite est facile à interpréter : il s'agit de la valeur actualisée de tous les salaires. On introduit donc les prix actualisés et les salaires actualisés suivants :

$$\rho_t = \beta_t p_t \text{ et } \omega_t = \beta_t w_t, \text{ avec } \beta_1 = 1, \beta_t = \frac{1}{1+i_{t-1}}\ \forall t \geq 2$$

et la contrainte budgétaire intertemporelle s'écrit :

$$\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 \leq \omega_1 \ell_1 + \omega_2 \ell_2$$

les consommations actualisées ne doivent pas dépasser les salaires actualisés. Cette contrainte n'est toutefois pas écrite sous sa forme la plus pratique pour le calcul des demandes de biens et des offres de travail. En effet, les membre de gauche et de droite de cette inégalité sont endogènes. Habituellement, on écrit la contrainte budgétaire avec les quantité endogènes à gauche, et les quantités exogènes dans le membre de droite. De même, on préfère écrire la fonction d'utilité en fonction du temps de loisir, pas du temps de travail ; cette convention garantit que l'utilité est croissante par rapport à tous ses arguments. Nous allons régler ces deux problèmes en même temps, ce qui nous ménera à une réinterprétation intéressante de la contrainte de budget. Pour cela utilisons la contrainte de temps :

$$\ell_t = \bar{x}_t - x_t$$

et remplaçons dans la contrainte précédente :

$$\begin{aligned} \rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 \le \omega_1(\bar{x}_1 - x_1) + \omega_2(\bar{x}_2 - x_2) \\ \Leftrightarrow \rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \le \omega_1 \bar{x}_1 + \omega_2 \bar{x}_2 \end{aligned}$$

le membre de gauche contient deux termes : la valeur actualisée des dépenses de consommation et un nouveau terme. Il s'agit de la somme des temps de loisirs des deux périodes x_t valorisés au taux de salaire actualisé. En effet, quand on prend une heure de loisirs, on perd le revenu associé à une heure de travail. On dit qu'on valorise les loisirs à leur coût d'opportunité : l'argent que l'on perd en les prenant. On actualise ce coût d'opportunité parce que les décisions se prennent toutes à la date $\tau = 0$. Le terme de gauche représente donc les dépenses de consommation et le coût d'opportunité des loisirs. Cette écriture est équivalente au fait d'acheter une heure de loisirs à un prix unitaire ω_t égal au salaire horaire. Le membre de droite représente la valorisation de tout le temps disponible du ménage. Il s'agit du salaire maximum qu'il pourrait gagner en travaillant pendant la totalité de son temps disponible. Ces revenus sont notés $R_t = w_t \bar{x}_t,\ t = 1,2$. La richesse correspondante s'écrit donc :

$$W \triangleq R_1 + \frac{R_2}{1+i_1} = \omega_1 \bar{x}_1 + \omega_2 \bar{x}_2$$

On peut donc présenter cette contrainte de la manière suivante. Le ménage dispose d'un revenu potentiel égal à W ; avec ce revenu il achète du temps de loisirs pour un montant $\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$ et des biens de consommation pour un montant $\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2$. Avec cette écriture le travail est devenu une variable de décision techniquement identique aux autres, ce qui simplifie la résolution. Il faut juste faire attention à l'interprétation des quantités liées au travail, car elle est différente. On redéfinit également la richesse comme le montant actualisé *maximum* que l'on pourrait dépenser.

Les préférences. Le travail modifie la contrainte de richesse et les préférences. Par convention, on ne met que les éléments qui augmentent l'utilité ; on choisit donc de mettre les loisirs et non le temps de travail. L'utilité s'écrit :

$$U(c_1, c_2, x_1, x_2)$$

avec

$$\frac{\partial U}{\partial c_t} > 0,\ \frac{\partial U}{\partial x_t} > 0$$

les utilités marginales sont positives et :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial c_t^2} < 0,\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_t^2} < 0$$

les utilités marginales de la consommation et des loisirs sont décroissantes. Notons ici que l'utilité marginale décroissante du temps de loisirs est équivalente à une désutilité marginale croissante du temps de travail.

Cette nouvelle écriture de la fonction d'utilité permet de définir de nouveaux taux marginaux de substitution. Tout d'abord, pour une période donnée t, le TMS entre loisirs et consommation est défini par :

$$\text{TMS}_{x_t,c_t} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial U}{\partial c_t}}$$

il donne le nombre d'unités de consommation qu'il faut donner au ménage pour qu'il renonce à une heure de loisirs ou, ce qui revient au même, pour le faire travailler une heure de plus. Un ménage ne travaillera plus que pour consommer plus, et toute volonté d'accroître les loisirs se traduira par une renonciation à la consommation. Ce TMS donne le taux d'échange subjectif que le ménage va appliquer dans ces choix ; plus précisément il va confronter ce taux à celui du marché pour décider du temps de loisirs qu'il prend et des quantités de biens qu'il consomme.

Le deuxième TMS qui apparaît est celui qui porte sur les temps de loisirs des deux périodes :

$$\mathrm{TMS}_{x_1,x_2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$$

il s'agit du nombre d'heures de loisirs qu'il faut donner au ménage en seconde période pour qu'il renonce à une heure de loisirs en première période. On note qu'ici il n'y a pas forcément de préférence pour le présent car il n'est pas certain qu'une heure de loisirs aujourd'hui soit plus intéressante qu'une heure de loisirs demain. On peut également concevoir des préférences pour le présent différentes pour les biens de consommation et le temps de loisir.

Le programme du consommateur. Le consommateur maximise son utilité sous contrainte de richesse. Le Lagrangien du problème s'écrit donc :

$$\mathscr{L} = U(c_1, c_2, x_1, x_2) - \lambda(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 - W),\ \lambda \geq 0$$

il mène aux conditions d'optimalité suivantes (on pose $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ et $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$) :

$$\frac{\partial U}{\partial c_t}(\tilde{c}, \tilde{x}) = \lambda \rho_t,\ \frac{\partial U}{\partial x_t}(\tilde{c}, \tilde{x}) = \lambda \omega_t,\ \forall t = 1, 2$$
$$\lambda(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 - W) = 0, \lambda \geq 0$$

en utilisant la propriété de motonicité de la fontion d'utilité par rapport à x_t ou c_t, on obtient $\lambda > 0$, de sorte que la contrainte de richesse est saturée à l'optimum $(\tilde{c}, \tilde{x})$. En effectuant les ratios de ces différentes égalités, on trouve des conditions d'optimalités plus facilement interprétables. Avec quatre équations, on peut produire trois ratios indépendants. La condition sur le TMS des consommations aux deux dates est identique à celle de la section précédente :

$$\mathrm{TMS}_{c_1,c_2}(\tilde{c}, \tilde{x}) = \frac{\frac{\partial U}{\partial c_1}(\tilde{c}, \tilde{x})}{\frac{\partial U}{\partial c_2}(\tilde{c}, \tilde{x})} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

nous nous concentrerons donc sur les deux autres ratios. Le deuxième ratio porte sur l'arbitrage consommation-loisirs. Ici, on peut choisir la première ou la seconde période :

$$\mathrm{TMS}_{x_t,c_t}(\tilde{c}, \tilde{x}) = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_t}(\tilde{c}, \tilde{x})}{\frac{\partial U}{\partial c_t}(\tilde{c}, \tilde{x})} = \frac{\omega_t}{\rho_t}$$

cette quantité représente le nombre d'unités de consommation qu'il faut donner au ménage pour compenser la perte d'une heure de loisirs. Elle doit être égale au salaire réel :

$$\frac{\omega_t}{\rho_t} = \frac{\beta_t w_t}{\beta_t p_t} = \frac{w_t}{p_t},$$

le salaire réel représente le nombre d'unités de biens que l'on peut acheter sur le marché. A l'optimum, il faut que le taux d'échange subjectif du consommateur soit égal au taux objectif du marché. Si le TMS consommation-loisir est supérieur au salaire réel cela veut dire que le ménage exige une meilleure rémunération que celle du marché pour renoncer à une heure de loisir ; il réduit son offre de travail (i.e. augmente son temps de loisirs) ; ceci a pour effet de diminuer son TMS (car l'utilité marginale du loisir est décroissante) et il se rapproche du salaire réel. Si le TMS consommation-loisir est inférieur au salaire réel, cela signifie que le marché offre un salaire réel supérieur à celui que le ménage désire ; donc il augmente son offre de travail (i.e. réduit son temps de loisirs), ce qui augmente son TMS qui se rapproche du salaire réel. A l'optimum le TMS consommation-loisirs est égal au salaire réel.

Le troisième ratio indépendant est celui des loisirs :

$$\mathrm{TMS}_{x_1,x_2}(\tilde{c},\tilde{x}) = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(\tilde{c},\tilde{x})}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}(\tilde{c},\tilde{x})} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

le TMS des loisirs est égal au rapport des salaires horaires des deux périodes (on a : $\omega_1/\omega_2 = w_1/w_2$). Le TMS représente ici le nombre d'heures de loisirs qu'il faut donner au ménage à la seconde période, pour compenser la perte d'une heure de loisirs en première période. Il s'agit d'une mesure de préférence pour le présent, exprimée en termes de loisirs. Si le TMS est supérieur au ratio des salaires cela signifie que le salaire relatif de seconde période est trop faible pour compenser la désutilité du travail de première période. Donc le ménage réduit son offre de travail en première période, ce qui augmente le loisir de première période et diminue le TMS (car l'utilité marginale est décroissante). Inversement si le TMS est plus petit que le ratio des salaires, cela signifie que le salaire relatif est plus élevé que ce que demande le ménage, donc le ménage augmente son offre de travail de première période. A l'optimum le TMS égale le ratio des salaires, le ménage n'a plus intérêt à réviser ses choix.

Exemple 2.6. *Considérons le cas d'une utilité de type Cobb-Douglas, exprimée en logarithmes. Pour simplifier son expression, nous allons supposer que l'utilité annuelle est stable dans le temps, et qu'il existe un facteur d'actualisation psychologique commun aux loisirs et à la consommation, noté γ. On aura :*

$$U(c,x) = u(c_1,x_1) + \gamma u(c_2,x_2),\ c = (c_1,c_2),\ x = (x_1,x_2)$$

avec

$$u(c,x) = \alpha_c \ln c + \alpha_x \ln x$$

cette forme est équivalente à l'écriture globale :

$$U(c,x) = \alpha_{11}\ln c_1 + \alpha_{12}\ln c_2 + \alpha_{21}\ln x_1 + \alpha_{22}\ln x_2$$

avec les définitions :

$$\alpha_{11} = \alpha_c,\ \alpha_{12} = \gamma\times\alpha_c,\ \alpha_{21} = \alpha_x,\ \alpha_{22} = \gamma\times\alpha_x$$

Cette fonction est croissante par rapport à tous ses arguments ; elle est aussi concave. Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathscr{L} = \alpha_c \ln c_1 + \alpha_x \ln x_1 + \gamma(\alpha_c \ln c_2 + \alpha_x \ln x_2) - \lambda(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 - W)$$

avec $W = \omega_1 \bar{x}_1 + \omega_2 \bar{x}_2$, *ce qui donne les conditions du premier ordre suivantes :*

$$\frac{\alpha_c}{\tilde{c}_1} = \lambda \rho_1 \tag{2.20a}$$
$$\frac{\alpha_x}{\tilde{x}_1} = \lambda \omega_1 \tag{2.20b}$$
$$\frac{\gamma \alpha_c}{\tilde{c}_2} = \lambda \rho_2 \tag{2.20c}$$
$$\frac{\gamma \alpha_x}{\tilde{x}_2} = \lambda \omega_2 \tag{2.20d}$$
$$W = \rho_1 \tilde{c}_1 + \rho_2 \tilde{c}_2 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \tag{2.20e}$$

des équations (2.20a) *à* (2.20d) *on retire :*

$$\rho_1 \tilde{c}_1 = \frac{\alpha_c}{\lambda} \tag{2.21a}$$
$$\omega_1 \tilde{x}_1 = \frac{\alpha_x}{\lambda} \tag{2.21b}$$
$$\rho_2 \tilde{c}_2 = \frac{\gamma \alpha_c}{\lambda} \tag{2.21c}$$
$$\omega_2 \tilde{x}_2 = \frac{\gamma \alpha_x}{\lambda} \tag{2.21d}$$

que l'on reporte dans la contrainte de richesse (2.20e). *On obtient alors :*

$$\frac{(1+\gamma)(\alpha_c + \alpha_x)}{\lambda} = W \Leftrightarrow \lambda = \frac{(1+\gamma)(\alpha_c + \alpha_x)}{W},$$

l'utilité marginale de la richesse à l'optimum est décroissante. On reporte cette expression de λ *dans les relations* (2.21a) *et* (2.21d), *ce qui donne les consommations optimales suivantes :*

$$\tilde{c}_1 = \frac{1}{1+\gamma}\left(\frac{\alpha_c}{\alpha_c + \alpha_x}\right)\frac{W}{\rho_1},\ \tilde{x}_1 = \frac{1}{1+\gamma}\left(\frac{\alpha_x}{\alpha_c + \alpha_x}\right)\frac{W}{\omega_1},$$
$$\tilde{c}_2 = \frac{\gamma}{1+\gamma}\left(\frac{\alpha_c}{\alpha_c + \alpha_x}\right)\frac{W}{\rho_2},\ \tilde{x}_2 = \frac{\gamma}{1+\gamma}\left(\frac{\alpha_x}{\alpha_c + \alpha_x}\right)\frac{W}{\omega_2},$$

Le coefficient γ *mesure le poids que l'on donne à l'utilité future, donc* $1/(1+\gamma)$ *mesure la préférence pour le présent et* $\gamma/(1+\gamma)$, *ratio croissant avec* γ *mesure la préférence pour le futur. Le coefficient* $\alpha_c/(\alpha_c+\alpha_x)$ *mesure la préférence pour la consommation par rapport au loisir et* $\alpha_x/(\alpha_c+\alpha_x)$ *la préférence pour le loisir. Enfin, on remarque les égalités suivantes :*

$$\frac{1}{1+\gamma} + \frac{\gamma}{1+\gamma} = 1$$
$$\frac{\alpha_c}{\alpha_c+\alpha_x} + \frac{\alpha_x}{\alpha_c+\alpha_x} = 1$$
$$\frac{1}{1+\gamma}\frac{\alpha_c}{\alpha_c+\alpha_x} + \frac{1}{1+\gamma}\frac{\alpha_x}{\alpha_c+\alpha_x} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{\alpha_c}{\alpha_c+\alpha_x} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{\alpha_x}{\alpha_c+\alpha_x} = 1$$

La première égalité représente le partage des préférences entre les deux période, la deuxième égalité le partage des préférences d'une période entre consommation et loisirs, et la troisième égalité le partage des préférences entre les deux sources d'utilité et les deux périodes. Dans ce cas simplifié, on peut les interpréter comme des pourcentages.

Les termes en W/ρ_t représente la quantité de bien de la période t que l'on peut acheter avec toute la richesse potentielle. Les deux quantités du ratio sont actualisées. Enfin, les termes en W/ω_t représentent le nombre maximum d'heures de loisirs que l'on peut se permettre avec la richesse W.

Chaque demande est égale au produit d'un coefficient de préférence par un indicateur de pouvoir d'achat. Le fait que la richesse, et non le revenu, intervienne dans toutes les demandes indique un modèle de revenu permanent. Plus la préférence pour le présent est élevée, plus les consommations et les loisirs augmentent en première période; dans le cas inverse l'épargne augmente ainsi et le temps de loisirs se déplacent. Plus la richesse est élevée plus les demandes augmente, et plus le prix d'un bien ou service augmente plus sa demande diminue.

Examinons les arbitages intertemporels. Pour la consommation on obtient :

$$\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} = \frac{1}{\gamma}\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

plus la préférence pour le futur est élevée, plus la consommation de première période est faible par rapport à celle de second période. Les consommation suivent donc les préférences. Mais les prix actualisés comptent également : plus le bien est cher en première période, moins on en achète. On peut aller un peu plus loin en faisant apparaître le taux d'intérêt, le taux d'inflation et le taux de préférence pour le présent. On définit le taux de préférence pour le présent ϕ par analogie avec le taux d'intérêt :

$$\gamma = \frac{1}{1+\phi},$$

qui permet de réécrire le résultat précédent comme :

$$\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} = (1+\phi)\frac{1+\pi_1}{1+i_1} = \frac{1+\phi}{1+r_1}$$

la consommation de première période est plus importante que la consommation de seconde période si le taux de préférence pour le présent est supérieur au taux d'intérêt réel ($\phi > r_1$), c'est-à-dire si le taux d'intérêt réel subjectif est supérieur au taux d'intérêt réel objectif. Economiquement, le taux d'intérêt réel est ce que le consommateur gagnera pour avoir renoncé à la consommation d'une unité de bien aujourd'hui. Il faut que cette compensation soit supérieure au taux de préférence pour le présent pour que le consommateur l'accepte.

Pour les loisirs, on obtient :

$$\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2} = \frac{1}{\gamma}\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

les temps relatifs de loisirs de première période seront d'autant plus courts que la préférence pour le futur γ est forte. Mais cette fois-ci les salaires actualisés viennent interférer avec les préférences. On note g_1 le taux de croissance du salaire nominal :

$$g_1 \triangleq \frac{w_2 - w_1}{w_1} \Leftrightarrow w_2 = (1+g_1)\,w_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{1+g_1}{1+i_1}\omega_1$$

maintenant notons $\bar{g}_1$ le taux de croissance du salaire actualisé :

$$\bar{g}_1 = \frac{1+g_1}{1+i_1},$$

on obtient :

$$\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2} = \frac{1+\phi}{1+\bar{g}_1}$$

la part de son temps que le ménage affecte aux loisirs en première période dépasse celle de seconde période si et seulement si son taux de préférence pour le présent dépasse le taux de croissance du salaire actualisé. Toute variation du salaire actualisé aura donc pour effet de modifier l'allocation intertemporelle du temps de loisirs.

Le raisonnement est symétrique pour le temps de travail, car $\tilde{\ell}_t = \bar{x}_t - \tilde{x}_t$. On a donc :

$$\tilde{\ell}_1 - \tilde{\ell}_2 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)$$

ainsi le temps de travail de première période augmentera par rapport à celui de seconde période soit quand le temps disponible augmente ($\bar{x}_1 > \bar{x}_2$), soit quand le taux de croissance du salaire réel est plus élevé que le taux de préférence pour le présent($\tilde{x}_2 > \tilde{x}_1$).

Les consommations se déplacent d'une période à l'autre grâce aux possibilité de placer et d'emprunter de l'argent. Le montant épargné (s'il est positif) ou emprunté (s'il est négatif), exprimé en part du revenu de première période, ou taux d'épargne net, est égal à :

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_1 &= w_1\bar{x}_1 - (w_1\tilde{x}_1 + p_1\tilde{c}_1)\\
&= w_1\bar{x}_1 - \frac{W}{1+\gamma}\\
&= \frac{\gamma\omega_1\bar{x}_1}{1+\gamma} - \frac{\omega_2\bar{x}_2}{1+\gamma}\\
&= \frac{\gamma R_1}{1+\gamma}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\frac{R_2}{(1+i_1)R_1}\right)\\
&= \frac{\gamma R_1}{1+\gamma}\left(1 - \frac{(1+\phi)(1+g_R)}{1+i_1}\right)
\end{aligned}$$

où g_R est le taux de croissance du revenu nominal :

$$g_R \triangleq \frac{R_2 - R_1}{R_1},$$

ce revenu augmente avec le salaire horaire et le temps total disponible de chaque période.

On épargne donc ($E_1 > 0$) quand la conditions suivante est remplie :

$$1 + i_1 > (1+\phi)(1+g_R) \tag{2.22}$$

c'est-à-dire quand le taux d'intérêt est élevé, quand le taux de préférence pour le présent est faible et que le taux de croissance des revenus est faible. En effet, dans ce dernier cas on a plus besoin d'épargner quand les revenus de seconde période sont faibles, voire en baisse. A l'opposé, si le revenu de seconde période est très élevé par rapport au revenu de première période on préférera emprunter, toutes choses égales par ailleurs (donc à préférence pour le présent identique). On remarque également que lorsque les revenus sont stables dans le temps :

$$g_R = 0 \Rightarrow i_1 > \phi,$$

le ménage épargne si le taux d'intérêt dépasse le taux de préférence pour le présent; sinon, il emprunte.

Quand on épargne ($E_1 > 0$) on remarque que le montant est d'autant plus élevé que $\gamma/(1+\gamma)$ est élevé. Ce ratio est croissant avec γ, qui mesure la préférence pour le futur. De même plus le revenu de première période est élevé plus on épargnera.

On remarque également que, en effectuant un développement limité au voisinage de $(\phi, g_R) = (0,0)$ *:*

$$(1+\phi)(1+g_R) \simeq 1+\phi+g_R,$$

de sorte que l'inégalité (2.22) *devient :*

$$i_1 > \phi + g_R,$$

pour que le ménage soit incité à épargner, le taux d'intérêt doit compenser la somme du taux de préférence pour le présent et du taux de croissance des revenus.

CHAPITRE 3

Les entreprises

Le chapitre précédent décrit les demandes de bien et les offres de travail. Les contreparties de ces quantités sont les offres de biens, ou production des entreprise, et la demande de travail, ou l'emploi utilisé par les entreprises pour produire les biens qu'elles offrent. Dans une première section, nous allons réviser le cas statique, avec un et deux facteurs de production. Dans une deuxième section, nous introduirons une décision intertemporelle : les choix d'investissement. L'emploi fera l'objet d'une troisième section.

L'approche intertemporelle possède plusieurs spécificités par rapport à l'approche classique. La première, immédiate, est l'accumulation du capital. Les investissements que l'on réalise aujourd'hui seront également productif demain, et il faut en tenir compte pour choisir le bon niveau de capital aujourd'hui. La seconde spécificité est le progrès technique. Au fur et à mesure que le temps passe, les technologies évoluent de sorte qu'une unité de capital ou une heure de travail n'ont pas la même productivité selon la date à laquelle on se place. Dans ce chapitre, nous traiterons cette question explicitement.

En effet, dire que la technologie change dans le temps revient à modifier la notion de variation de la quantité de capital dans un sens qualitatif. En investissant demain plutôt qu'aujourd'hui, on effectue un choix technologique, on choisit d'adopter une nouvelle technologie. Ici, nous nous limiterons délibérément à deux périodes, donc l'arbitrage se fera directement entre la technologie actuelle (investir en première période) et la technologie future (investir en seconde période).

3.1 Rappels : le cas statique

Avec un seul facteur de production. Supposons que l'entreprise produit une quantité y à partir d'un facteur de production z. La relation entre ces deux quantités est appelée fonction de production : $f(z)$. Elle donne la quantité *maximale* de bien que l'on peut produire à partir de z unités de facteur de production. Dans le cas général on a donc $y \leq f(z)$. Cette inégalité définit un ensemble que l'on appelle l'ensemble de production : $Y = \{(y,z) : y \leq f(z)\}$. Comme nous n'étudions pas l'efficacité productive dans ce cours, nous ferons l'hypothèse que les entreprises produisent sur la frontière de l'ensemble de production Y ; elle se définit par $\bar{Y} = \{(y,z) : y = f(z)\}$. Deux caractéristiques de la production sont particulièrement importantes : les rendements d'échelle et la productivité marginale. Pour définir les rendements d'échelle, on compare la production que l'on obtient en multipliant par $\lambda > 1$ la quantité de facteur de production z avec une multiplication par λ de la production. On regarde donc si l'accroissement de production et proportionnel ou non à l'accroissement de la quantité de facteur :

$$e = f(\lambda z) - \lambda f(z),$$

si $e > 0$, la production augmente plus que proportionnellement à la quantité de facteur, on dit que les rendements d'échelles sont croissants. Si $e = 0$, l'augmentation est juste proportionnelle, les rendements sont constants. Si, au contraire, $e < 0$ la hausse de la production est moins que proportionnelle à la hausse de la quantité de facteur, les rendements d'échelle sont décroissants.

La productivité marginale représente la hausse de production consécutive à une hausse d'une unité de la quantité de facteur. Son montant dépend de la production déjà réalisée. On la définit comme :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = f'(z),$$

on supposera que cette quantité est décroissante. Chaque unité de facteur additionnelle produit de moins en moins. Ceci revient à poser $f''(z) < 0$. Cette condition est importante pour la suite.

Soit p le prix du bien produit et c le prix unitaire du facteur de production z. Le profit de l'entreprise se définit comme le gain monétaire que réalise l'entrepreneur. Il se définit par :

$$\Pi(z) = py - cz = pf(z) - cz$$

on supposera ici que l'entrepreneur chercher à gagner le plus d'argent possible, qu'il maximise son profit. La condition du premier ordre de maximisation du profit est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}z}(\tilde{z}) = 0 \Leftrightarrow f'(\tilde{z}) = \frac{c}{p} \tag{3.1}$$

le profit est maximum quand la productivité marginale est égal au coût réel du facteur de production. Ceci n'est vrai que lorsque la condition du second ordre est vérifiée :

$$\frac{\mathrm{d}^2\Pi}{\mathrm{d}z^2}(\tilde{z}) < 0 \Leftrightarrow f''(\tilde{z}) < 0.$$

La condition du premier ordre (3.1) signifie simplement qu'au maximum de profit,le montant que rapporte la dernière unité de facteur utilisée doit être égale à ce qu'elle coûte. En effet, $f'(z)$ est la hausse de production consécutive à l'emploi d'une unité supplémentaire de facteur, donc $pf'(z)$ est le montant en Euros que rapporte cette dernière unité de facteur. Cette unité coûte c à l'entreprise donc $pf'(z) - c$ est le profit que rapporte la dernière unité produite ou *le profit marginal*. Si la productivité marginale est supérieure au coût réel du facteur, une unité supplémentaire rapporte plus qu'elle ne coûte, donc il faut augmenter la quantité de facteur pour augmenter le profit. Si la productivité marginale est inférieure au coût réel du facteur, une unité supplémentaire fait faire une perte à l'entreprise, donc il faut réduire la quantité de facteur pour augmenter le profit. Au maximum de profit on doit donc avoir l'égalité de la productivité marginale et du coût réel du facteur de production car, arrivé en ce point, on ne peut plus augmenter le profit en modifiant la quantité de facteur.

Exemple 3.1. *Soit la fonction de Cobb Douglas $f(z) = Az^{\mu}$, $0 < \mu < 1$. Le paramètre A mesure l'efficacité productive car une valeur plus élevée de A est associée à une production plus élevée pour une même quantité du facteur de production. Les rendements d'échelle sont décroissants puisque :*

$$f(\lambda z) = A(\lambda z)^{\mu} = \lambda^{\mu} f(z),$$

et que $\forall \lambda > 1, \mu < 1,\ \lambda^{\mu} < \lambda$. *La productivité marginale est donnée par :*

$$f'(z) = A\mu z^{(\mu-1)} > 0$$

et cette fonction est décroissante puisque :

$$f''(z) = A\mu(\mu-1)z^{(\mu-2)} < 0,\ \forall 0 < \mu < 1.$$

Le profit est égal à $\Pi(z) = pAz^{\mu} - cz$ *de sorte que la condition du premier ordre est donnée par :*

$$A\mu\tilde{z}^{(\mu-1)} = \frac{c}{p}$$

en résolvant on trouve la demande de facteur suivante :

$$\tilde{z} = \left(\mu A \frac{p}{c}\right)^{\frac{1}{1-\mu}}$$

la demande de facteur est croissante avec l'efficacité productive A et décroissante avec le coût réel du facteur (c/p). En logarithme, la solution s'écrit :

$$\ln \tilde{z} = \frac{\ln(A\mu)}{1-\mu} - \frac{1}{1-\mu}\ln\left(\frac{c}{p}\right)$$

donc quand le coût réel du facteur c/p *augmente de 1%, la demande de facteur diminue de* $1/(1-\mu)$%. *Cette valeur est supérieure à l'unité* $\forall\ 0 < \mu < 1$ *de sorte que la demande de facteur diminue plus vite que son prix relatif n'augmente.*

Avec travail et capital. La section précédente s'applique *a priori* aussi bien au travail qu'au capital. Toutefois, comme il n'y a qu'une période, le capital se réduit à sa plus simple expression : l'investissement, c'est-à-dire la dépense en capital sur une seule période. Seul un modèle dynamique peut permettre d'introduire les notions pertinentes pour l'analyse du capital. Ici, nous présentons un modèle statique simple à deux facteurs : le travail et l'investissement. Le temps de travail est noté ℓ et l'investissement k. Le salaire horaire est noté w et le prix des biens d'équipement c. La fonction de production possède maintenant deux arguments : le travail et le capital. On a :

$$y = f(k, \ell)$$

on définit les productivité marginales comme les quantités de biens supplémentaires que l'on peut produire en augmentant les quantités de facteurs d'une unité. La productivité marginale du travail est égale à $\partial y/\partial \ell$ et celle du capital à $\partial y/\partial k$. Elles sont supposées décroissantes : les unités successives de facteurs de production rapportent de moins en moins. On définit le taux marginal de substitution technique capital-travail de la manière suivante :

$$\mathrm{TMST}_{k,\ell} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial k}}{\dfrac{\partial y}{\partial \ell}}$$

il s'agit du nombre d'heures de travail qu'il faut pour compenser la diminution d'une unité de capital. Plus ce nombre est élevé, plus le capital est efficace, puisqu'il faut beaucoup d'heures de travail pour remplacer une de ses unités. On peut aussi interpréter le TMST comme le nombre d'heure de travail que l'on peut remplacer par une unité de capital.

Exemple 3.2. *On considère la fonction de Cobb-Douglas suivante :*

$$y = Ak^{\mu_k}\ell^{\mu_\ell},\ \mu_k, \mu_\ell > 0,\ \mu_k + \mu_\ell < 1$$

Il s'agit d'une fonction de production à élasticités constantes. Quand la quantité de capital augmente de 1%, la production augmente de μ_k%, quand le nombre d'heures de travail augmente de 1%, la production augmente de μ_ℓ%. Les productivités marginales du capital et du travail sont égales à :

$$\frac{\partial y}{\partial k} = A\mu_k k^{\mu_k - 1}\ell^{\mu_\ell}$$
$$\frac{\partial y}{\partial \ell} = A\mu_\ell k^{\mu}\ell^{\mu_\ell - 1}$$

la productivité marginale du capital est décroissante avec la quantité de capital ($\mu_k < 1$) de sorte que chaque unité supplémentaire est moins efficace que la précédente. On voit aussi que plus μ_k est élevée, plus la productivité marginale du capital est forte. On trouve également que la productivité marginale du travail est décroissante avec le nombre d'heures travaillées ($\mu_\ell < 1$). De même, plus μ_ℓ est élevée plus le travail est productif. Le TMST capital-travail est égal à :

$$\mathrm{TMST}_{k,\ell} = \frac{\mu_k}{\mu_\ell}\frac{\ell}{k} = \frac{\mu_k}{\mu_\ell}\left(\frac{k}{\ell}\right)^{-1}$$

il est croissant avec l'efficacité du capital par rapport au travail (μ_k/μ_ℓ) et décroissant avec l'intensité capitalistique, l'importance du capital déjà installé par rapport au travail (k/ℓ).

Le profit de l'entreprise s'écrit :

$$\Pi(k,\ell) = py - w\ell - ck = pf(k,\ell) - w\ell - ck$$

et les conditions du premier ordre deviennent :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial k}(\tilde{k},\tilde{\ell}) = p\frac{\partial f}{\partial k}(\tilde{k},\tilde{\ell}) - c = 0$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \ell}(\tilde{k},\tilde{\ell}) = p\frac{\partial f}{\partial \ell}(\tilde{k},\tilde{\ell}) - w = 0$$

Les quantités $(\tilde{k},\tilde{\ell})$ sont les demandes de facteurs de production. On obtient la condition :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial k}(\tilde{k},\tilde{\ell})}{\frac{\partial f}{\partial \ell}(\tilde{k},\tilde{\ell})} = \frac{c}{w}$$

le TMST capital-travail est égal au coût relatif du capital (par rapport au travail). Le TMST capital-travail représente le ratio entre ce que rapporte, à la marge une unité de capital, et ce que rapporte, à la marge, une heure de travail. Le ratio c/w représente le ratio de ce que coûte une unité de capital supplémentaire, et de ce que coûte une heure de travail supplémentaire. Au maximum de profit, les deux ratios doivent être égaux. Si le TMST capital-travail est supérieur au coût relatif du capital c/w, l'entreprise peut produire plus avec une unité de capital supplémentaire que ce qu'elle lui coûte. Donc elle augmente son capital, ce qui réduit sa productivité marginale. Ceci implique une diminution du TMST capital-travail et le processus continue jusqu'à ce que le TMST capital-travail soit égal au coût relatif des facteurs. Inversement, si le TMST capital-travail est inférieur au coût relatif du capital, l'entreprise gagne moins avec la dernière unité de capital que ce qu'elle lui coûte, donc elle réduit son capital, ce qui augmente sa productivité marginale. Ceci implique une hausse du TMST capital-travail et le processus ne s'arrête que lorsque le TMST capital-travail est égal au coût relatif du capital.

Exemple 3.3. *Avec une fonction de Cobb-Douglas, la condition précédente s'écrit :*

$$\frac{\mu_k}{\mu_\ell}\frac{\tilde{\ell}}{\tilde{k}} = \frac{c}{w} \Leftrightarrow \tilde{\ell} = \frac{c}{w}\frac{\mu_\ell}{\mu_k}\tilde{k}$$

et l'on peut utiliser ce résultat dans la condition du premier ordre :

$$A\mu_k \tilde{k}^{\mu_k - 1}\tilde{\ell}^{\mu_\ell} = \frac{c}{p}$$

ce qui donne :

$$\tilde{k} = \left(A\left(\mu_k \frac{p}{c}\right)^{1-\mu_\ell}\left(\mu_\ell \frac{p}{w}\right)^{\mu_\ell}\right)^{\frac{1}{1-(\mu_k+\mu_\ell)}}$$

que l'on reporte dans la relation de départ :

$$\tilde{\ell} = \left(A\left(\mu_k \frac{p}{c}\right)^{\mu_k}\left(\mu_\ell \frac{p}{w}\right)^{1-\mu_k}\right)^{\frac{1}{1-(\mu_k+\mu_\ell)}}$$

Les demandes de facteurs sont donc croissantes avec la productivité globale des facteurs A et décroissantes avec les coûts réels des facteurs (c/p et w/p). Une question importante est celle de l'évolution des demandes de facteurs quand leur prix relatif varie. Pour répondre à cette question, on peut calculer l'intensité capitalistique :

$$\frac{\tilde{k}}{\tilde{\ell}} = \frac{\mu_k}{\mu_\ell}\frac{w}{c}$$

plus l'élasticité du capital est élevée par rapport au travail, plus on investit, et plus le capital est cher par rapport au travail (w/c) faible moins on investit.

En résumé, si le coût d'un facteur augmente, deux modifications se produisent. D'une part, les demandes des deux facteurs diminuent et, d'autre part, le ratio entre la demande du facteur dont le coût augmente et celui dont le coût ne varie pas diminue.

3.2 Production et investissement

Le capital est un bien durable. Sa consommation à une date n'interdit pas sa consommation à une autre date. Il peut toutefois s'user ou devenir obsolète (i.e., technologiquement dépassé) de sorte qu'une partie du capital se déprécie à chaque période. Pour maintenir le niveau de son capital, un entrepreneur peut décider d'investir. En achetant un bien durable utile à la production (e.g., terrains, bâtiments, équipements) l'entrepreneur peut augmenter la quantité qu'il produira à l'avenir. Pour cela, il aura généralement besoin d'emprunter pour financer une partie de ses achats de capital. On doit donc introduire deux notions quand on étudie l'investissement : la dépréciation du capital et le taux d'intérêt.

Avec investissement seul. Pour simplifier, nous allons commencer par étudier les choix intertemporels quand il n'y a que du capital qui intervient dans la production. Ceci va nous permettre de mieux étudier la dynamique du modèle. Le concept central de cette section est le *coût d'usage du capital* (*user cost of capital*, en anglais) encore appelé le *prix de location du capital* (*rental price of capital*, en anglais).

A chaque période t on suppose donc que la production est résumée par la fonction de production :

$$y_t = f_t(k_t)$$

où y_t est la production et k_t le capital. La notation f_t indique que la fonction de production dépend du temps, elle est influencée par les évolutions technologiques. Le capital résulte de l'accumulation de biens d'équipements, selon la règle de l'inventaire permanent :

$$\begin{aligned} k_1 &= I_1 \\ k_t &= (1-\delta)k_{t-1} + I_t \end{aligned}$$

où I_t est l'investissement réalisé au début de la période t. Pour la première valeur, le *capital initial* est égal à l'investissement. Pour les périodes suivantes, l'entreprise peut utiliser la part de ses anciens équipements encore en état de produire $(1-\delta)k_{t-1}$ et investir un montant supplémentaire I_t au début de la période t. Au total, elle pourra donc produire avec $k_t = (1-\delta)k_{t-1} + I_t$ unités de capital. La fonction de production ne comporte dans cette section qu'un seul facteur de production : le capital. Toutefois, elle se modifie dans le temps car les technologies évoluent.

Nous pouvons maintenant écrire l'expression des profits de l'entreprise. En notant p_t le prix du bien produit et c_t le prix des biens d'équipement, on obtient le profit courant de la période t :

$$\Pi_t = p_t y_t - c_t I_t = p_t f_t(k_t) - c_t I_t$$

ce profit dépend des décisions prises en t mais également de toutes les périodes précédentes via le terme k_t. Les décisions de l'entreprise se prennent en fonction de l'ensemble des périodes de production. Par convention, on actualise à la date $\tau = 0$, c'est-à-dire en début de période $t = 1$. Avec un taux d'intérêt nominal i_1, le profit intertemporel s'écrit :

$$\Pi = \Pi_1 + \frac{1}{1+i_1}\Pi_2 = p_1 y_1 - c_1 I_1 + \frac{1}{1+i_1}\left(p_2 y_2 - c_2 I_2\right) \tag{3.2}$$

Coût d'usage du capital. Pour définir le coût d'usage du capital, noté u_t, on pose :

$$\begin{aligned} \Pi(k_1, k_2) &= \bar{\Pi}_1(k_1) + \frac{1}{1+i_1}\bar{\Pi}_2(k_2) \\ \bar{\Pi}_t(k_t) &= p_t y_t - u_t k_t,\ t = 1,2 \end{aligned}$$

où Π est le profit intertemporel. On détermine donc u_t par identification. Pour cela on utilise les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= k_1 \\ I_2 &= k_1 - (1-\delta)k_2 \end{aligned}$$

et l'on remplace dans l'expression (3.2) de Π, ce qui donne :

$$\Pi = p_1 y_1 - \left(c_1 - c_2 \frac{1-\delta}{1+i_1}\right) k_1 + \frac{1}{1+i_1}(p_2 y_2 - c_2 k_2)$$

d'où

$$u_1 = c_1 - c_2 \frac{1-\delta}{1+i_1}$$
$$u_2 = c_2$$

Le coût d'usage du capital de la seconde période est égal au coût des biens d'équipement ($u_2 = c_2$). Ce résultat vient du fait que le modèle ne comporte que deux périodes, et que le capital de seconde période n'est utilisé que pendant cette période. Pour avoir un effet dynamique, il faut considérer un bien d'équipement qui sert pendant plus d'une période. C'est le cas du capital initial, l'investissement de première période, qui sert aussi en période deux. On voit que dans ce cas l'expression du coût d'usage du capital est plus complexe. On peut le réécrire sous la forme suivante :

$$u_1 = c_1 \left(1 - \frac{(1+g_c)(1-\delta)}{1+i_1}\right) \simeq c_1(i_1 + \delta - g_c)$$

où g_c est le taux de croissance du prix des biens d'équipement, c'est-à-dire le « taux d'inflation » sur les biens d'équipement. Le coût d'usage représente ce que coûte la location d'une unité de capital pendant une période.

Pour bien comprendre ce résultat considérons que tout se passe comme si on achetait une unité de capital en $\tau = 0$ (le début de la période $t = 1$) et qu'on la revende en $\tau = 1$ (le début de la période 2). Il faudrait commencer par emprunter c_1 au taux i_1 car on ne dispose pas encore de la vente de la production pour payer le capital. Il faut également payer la dépréciation δ et revendre le bien au prix c_2. Globalement, on devra donc effectuer les opérations financières suivantes en $\tau = 1$:

- rembourser le prêt (capital et intérêts) : $(1+i_1)c_1$
- payer la dépréciation du bien d'équipement : δc_1
- encaisser le produit de la vente du bien d'équipement : $c_2 = (1+g_c)c_1$

Globalement, on aura donc payé :

$$(1+i_1)c_1 + \delta c_1 - (1+g_c)c_1 = (i_1 + \delta - g_c)c_1 = u_1$$

on retrouve le coût d'usage du capital.

Grâce à ce concept, notre problème de maximisation dynamique peut se réécrire comme un problème de maximisation séparable par période, dont la résolution sera identique à la résolution d'une succession de programmes statiques :

$$\max_{k_1,k_2} \underbrace{p_1 y_1 - u_1 k_1}_{t=1} + \frac{1}{1+i_1} \underbrace{(p_2 y_2 - u_2 k_2)}_{t=2}$$

avec cette propriété il est équivalent de maximiser globalement le profit intertemporel par rapport à (k_1, k_2) ou chaque profit annuel $\bar{\Pi}_t(k_t) = f_t(k_t) - u_t k_t$ par rapport au capital courant k_t car les conditions du premier ordre sont les mêmes. Il faut juste penser à utiliser le coût d'usage du capital à la place du prix des biens d'équipement. Plus précisément les conditions du premier ordre sont données par :

$$p_1 \frac{\partial f_1}{\partial k_1}(\tilde{k}_1) - u_1 = 0$$
$$\frac{1}{1+i}\left(p_2 \frac{\partial f_2}{\partial k_2}(\tilde{k}_2) - u_2\right) = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$\frac{\partial f_t}{\partial k_t}(\tilde{k}_t) = \frac{u_t}{p_t}, \ \forall t$$

la productivité marginale du capital doit être égale au coût d'usage réel du capital à toutes les dates. Le problème de maximisation du profit est donc séparable par période une fois reformulé en fonction du coût d'usage du capital.

Exemple 3.4. *Considérons maintenant une fonction de Cobb-Douglas. Dans le cas intertemporel, nous devons introduire une nouvelle caractéristique de cette fonction : le progrès technique. Ce concept correspond à l'intuition suivante : au fur et à mesure que le temps passe on peut produire plus avec les mêmes quantités de facteur de production. Dans notre exemple, une unité de capital permettra de produire plus pendant la période 2 que pendant la période 1. On note A_t la productivité globale des facteurs, son taux de croissance, noté g_A, est appelé le taux de progrès technique ou « progrès technique ». La fonction de production est donc définie par :*

$$\begin{aligned} y_t &= f_t(k_t) \\ &= A_t k_t^{\mu_k}, \ 0 < \mu_k < 1, A_t > 0 \end{aligned}$$

où le coefficient μ_k désigne l'élasticité de la production au capital. Comme, dans cet exemple, le capital est le seul facteur de production, il s'agit aussi des rendements d'échelle. La productivité moyenne du capital est définie par :

$$\frac{y_t}{k_t} = A_t k_t^{\mu_k - 1}$$

elle est croissante avec A_t. Il en va de même de la productivité marginale du capital, qui s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}y_t}{\mathrm{d}k_t} = A_t \mu_k k_t^{\mu_k - 1}.$$

Nous supposerons que le progrès technique accroît la productivité globale des facteurs au taux :

$$g_A = \frac{A_2 - A_1}{A_1} > 0$$

ce qui signifie que l'efficacité de la production s'accroît dans le temps. Le profit intertemporel réécrit avec le concept de coût d'usage du capital est défini par :

$$\Pi = p_1 A_1 k_1^{\mu_k} - u_1 k_1 + \frac{1}{1+i_1}\left(p_2 A_2 k_2^{\mu_k} - u_2 k_2\right)$$

il suffit alors d'écrire les conditions du premier ordre par rapport au capital :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial k_1}(\tilde{k}) = p_1 A_1 \mu_k \tilde{k}_1^{\mu_k - 1} - u_1 = 0$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial k_2}(\tilde{k}) = \frac{1}{1+i_1}\left(p_2 A_2 \mu_k \tilde{k}_2^{\mu_k - 1} - u_2\right) = 0$$

on voit que le problème est séparable et que les deux équations donnent la même solution générique, avec juste un décalage temporel :

$$A_t \mu_k \tilde{k}_t^{\mu_k - 1} = \frac{u_t}{p_t},\ t = 1,2 \tag{3.3}$$

la productivité marginale du capital est égale au coût d'usage réel du capital à toutes les périodes. En résolvant (3.3), *on trouve les demandes de capital des entreprises :*

$$\tilde{k}_t = \left(\mu_k A_t \frac{p_t}{u_t}\right)^{\frac{1}{1-\mu_k}}$$

cette demande est décroissante avec le coût d'usage réel du capital (u_t / p_t) et croissante avec la productivité globale des facteurs A_t. Cette formule nous permet également d'étudier l'évolution de la demande de capital dans le temps. En effet, on a :

$$\frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\frac{p_2}{p_1}\frac{u_1}{u_2}\right)^{\frac{1}{1-\mu_k}}$$

La relation précédente peut s'interpréter comme un critère de choix de la technologie. En effet, augmenter k_1 revient à produire plus avec l'ancienne technologie, et augmenter k_2 avec la nouvelle. Notons également que rien n'empêche de produire en t = 2 avec l'ancienne technologie. On peut décider que $I_2 = 0$ et ne produire qu'avec l'ancienne. L'entrepreneur est juste contraint de se procurer l'ancienne technologie en t = 1, ce qui ne pose aucun problème parce que les décisions sont prises au début de la période 1. Posons la notation suivante pour le coût réel d'usage du capital :

$$\bar{u}_t = \frac{u_t}{p_t}$$

on obtient :

$$\frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2}\right)^{\frac{1}{1-\mu_k}} \tag{3.4}$$

plus la nouvelle technologie est productive (A_2 / A_1 élevé) plus on sera incité à l'adopter ; inversement, plus elle est chère ($\bar{u}_2 / \bar{u}_1$ élevé), plus on sera incité à garder l'ancienne technologie. Enfin, le niveau de capital à partir duquel on utilise bien la nouvelle technologie vérifie la propriété suivante :

$$\tilde{I}_2 = \tilde{k}_2 - (1-\delta)\tilde{k}_1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} \geq 1 - \delta$$

et non $\tilde{k}_2 > \tilde{k}_1$. Un niveau de capital qui diminue légèrement peut être compatible avec un investissement positif dans la nouvelle technologie. On peut également écrire les relations précédentes en faisant apparaître les taux de croissance suivants :

$$g_{\tilde{k}} \triangleq \frac{\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1}{\tilde{k}_1},\ g_A \triangleq \frac{A_2 - A_1}{A_1},\ g_{\bar{u}} \triangleq \frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{\bar{u}_1}$$

en reportant dans la relation (3.4) *en logarithmes, on obtient :*

$$\ln(1 + g_{\tilde{k}}) = \frac{1}{1 - \mu_k}\left(\ln(1 + g_A) - \ln(1 + g_{\bar{u}})\right)$$

en utilisant l'approximation $\ln(1 + x) \simeq x$, *on obtient :*

$$g_{\tilde{k}} = \frac{1}{1 - \mu_k}\left(g_A - g_{\bar{u}}\right)$$

on a donc un accroissement de la demande de capital quand le taux de progrès technique g_A dépasse le taux de croissance du coût d'usage réel du capital. Pour que l'investissement soit positif en seconde période, il faut que :

$$g_{\tilde{k}} \geq -\delta$$

Annexe A

Développements limités

On utilise les développements limités pour simplifier certaines expressions. La première est le taux d'intérêt réel, la seconde est l'expression du coût d'usage du capital.

Taux d'intérêt réel. Le taux d'intérêt réel et défini par :

$$1 + r_t = \frac{1 + i_t}{1 + \pi_t} \Leftrightarrow r_t = \frac{i_t - \pi_t}{1 + \pi_t}$$

où t désigne la période, r le taux d'intérêt réel, i le taux d'intérêt nominal et π le taux d'inflation. En ignorant le temps, sans perte de généralité, on peut donc interpréter le taux d'intérêt réel r comme une fonction des deux variables (i, π) :

$$r = f(i, \pi) = \frac{i - \pi}{1 + \pi}$$

et en effectuant un développement limité de r au voisinage de $(0, 0)$ on obtient :

$$r \simeq f(0,0) + f'_i(0,0)(i-0) + f'_\pi(0,0)(\pi - 0)$$

or on a :

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f'_i(i,\pi) &= \frac{1}{1+\pi} \Rightarrow f'_i(0,0) = 1 \\ f'_\pi(i,\pi) &= -\frac{1+i}{(1+\pi)^2} \Rightarrow f'_\pi(0,0) = -1 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$r \simeq i - \pi$$

le taux d'intérêt est à peu près égal à la différence du taux d'intérêt nominal et du taux d'inflation.

Coût d'usage du capital. Dans le modèle d'investissement à deux périodes, le coût d'usage du capital de première période est défini par :

$$u_1 = c_1 \left(1 - \frac{(1+g_c)(1-\delta)}{(1+i_1)} \right)$$

où c_1 est le prix des biens d'équipement, g_c le taux de croissance du prix des biens d'équipement, δ le taux de dépréciation du capital et i_1 le taux d'intérêt nominal. L'approximation porte sur la fonction suivante :

$$f(\delta, i_1, g_c) = 1 - \frac{(1+g_c)(1-\delta)}{(1+i_1)} = \frac{i_1 + \delta - g_c + \delta g_c}{1+i_1}$$

la fonction et les dérivées sont égales à :

$$\begin{aligned}
f(0,0,0) &= 0 \\
f'_\delta(\delta, i_1, g_c) &= \frac{1+g_c}{1+i_1} \Rightarrow f'_\delta(0,0,0) = 1 \\
f'_{i_1}(\delta, i_1, g_c) &= \frac{(1-\delta)(1+g_c)}{(1+i_1)^2} \Rightarrow f'_{i_1}(0,0,0) = 1 \\
f'_{g_c}(\delta, i_1, g_c) &= \frac{\delta - 1}{1+i_1} \Rightarrow f'_{g_c}(0,0,0) = -1
\end{aligned}$$

donc

$$f(\delta, i_1, g_c) \simeq f(0,0,0) + f'_\delta(0,0,0)(\delta - 0) + f'_{i_1}(0,0,0)(i_1 - 0) + f'_{g_c}(0,0,0)(g_c - 0) = \delta + i_1 - g_c$$