

### Questions de Cours

(une page minimum par question)

1. Les décisions de consommation dans un environnement dynamique peuvent se réécrire techniquement comme un problème statique. Comment faut-il reformuler le problème de décision des ménages pour parvenir à ce résultat ? On illustrera la réponse par un exemple à deux périodes et un seul bien.  
*Polycopié, chapitre 2.*
2. Les décisions d'investissement dans un environnement dynamique peuvent se réécrire techniquement comme un problème statique. Comment faut-il reformuler le problème de décision du producteur pour parvenir à ce résultat ? On illustrera la réponse par un exemple où un bien est produit exclusivement avec du capital.  
*Polycopié, chapitre 3.*
3. Qu'est ce que la loi de Walras ? Comment l'obtient-on ? Comment s'en sert-on ?  
*Traité en cours. Si  $n - 1$  marchés sont en équilibre, le  $n$ -ième marché est à l'équilibre. On l'obtient en agrégeant les contraintes budgétaires des ménages. On s'en sert pour la résolution en prix.*

### Exercice

On considère une entreprise qui produit une quantité  $q_t$  de bien à partir de  $k_t$  unités de capital. Elle opère sur deux périodes ( $t \in \{1, 2\}$ ) et on suppose, pour simplifier, que la dépréciation du capital est nulle. Le taux d'intérêt est égal à  $i$  et l'investissement de la date  $t$  est noté  $I_t$ . Le prix du bien produit est supposé constant ( $p_t = 1, \forall t$ ) et le prix des biens d'équipement est constant, donné par  $c$ . La fonction de production de l'entreprise est égale à :

$$q_t = f_t(k_t), \quad t = 1, 2.$$

1. Donner l'expression du profit intertemporel de l'entreprise.

$$\Pi = q_1 - cI_1 + \frac{1}{1+i}(q_2 - cI_2)$$

2. Donner l'expression des coûts d'usage du capital des deux périodes (notés  $u_t$ ). Commenter.

On remplace les investissements par leurs expressions en fonction des capitaux,  $I_1 = k_1$  et  $I_2 = k_2 - k_1$  :

$$\Pi = q_1 - u_1 k_1 + \frac{1}{1+i}(q_2 - u_2 k_2)$$

avec

$$u_1 = \frac{ic}{1+i} \text{ et } u_2 = c.$$

Les coûts d'usage sont croissants avec le coût des biens d'équipement. Le coût de première période est également croissant avec le taux d'intérêt. Le coût de dernière période est égal au coût des biens d'équipement parce qu'il n'est utilisé qu'une seule période.

3. On suppose maintenant que  $f_t(k_t) = A_t k_t^{2/3}$ . On pose  $A_2 = (1 + g)A_1$ . Commenter les propriétés de cette fonction de production.

*Les rendements d'échelle sont décroissants. La productivité marginale, égale à  $\frac{2}{3} A_t k_t^{-1/3}$ , est décroissante. Elle s'accroît avec le progrès technique.*

4. Donner la définition du taux marginal de transformation technique intertemporel. De quoi dépend-il ?

*Le TMST intertemporel est égal au nombre d'unités de capital de première période qu'il faut pour remplacer une unité de capital de seconde période :*

$$\frac{\frac{\partial q_2}{\partial k_2}}{\frac{\partial q_1}{\partial k_1}} = (1 + g) \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

*Il est croissant avec le progrès technique et décroissant avec la quantité relative de capital de seconde période déjà utilisée.*

5. Quelle est la valeur du capital initial choisie par l'entreprise,  $k_1$  ? Commenter.

*Elle est donnée par la condition du premier ordre suivante :*

$$\frac{\partial q_1}{\partial k_1} - u_1 = 0$$

*ce qui donne*

$$\tilde{k}_1 = \frac{8}{27} \left( \frac{A_1}{c} \right)^3 \left( 1 + \frac{1}{i} \right)^3$$

6. Quelle est le taux de croissance du capital,  $I_2/k_1$  ? Commenter ses déterminants.

*On commence par calculer le capital de seconde période par la condition suivante :*

$$\frac{\partial q_2}{\partial k_2} - u_2 = 0$$

*ce qui donne :*

$$\tilde{k}_2 = \frac{8}{27} \left( \frac{A_1}{c} \right)^3 (1 + g)^3$$

*puis on utilise la relation  $I_2 = k_2 - k_1$  au point solution, de sorte que :*

$$\frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} - 1 = \left( \frac{i}{1 + i} (1 + g) \right)^3 - 1$$

*Le taux de croissance du capital est croissant avec le progrès technique. Le second résultat, sur le taux d'intérêt, s'obtient parce que le modèle ne comporte que deux périodes. Le capital de première période décroît avec le taux d'intérêt et celui de dernière période n'en dépend pas donc le taux de croissance du capital s'accroît avec le taux d'intérêt.*